С.В.Анулова, А.Ю.Веретенников, Н.В.Крылов, Р.Ш.Липцер, А.Н.Ширяев

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Итоги науки и техн. Соврем, пробл. матем. Фундам. направления. — ВИНИТИ, 1989. Т. 49. С. 5—260

Изложены основные вопросы стохастического исчисления, относящиеся к: свойствам винеровского процесса и его связи с уравнениями в частных производных, рассмотрены сильные и слабые решения стохастических дифференциальных уравнений, эволюционные уравнения. Большое внимание уделено стохастическому интегрированию по семимартингалам и случайным: мерам, абсолютной непрерывности и сингулярности вероятностных мер, предельным теоремам для семимартингалов.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УДК 519.21

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

С. В. Анулова, А. Ю. Веретенников, Н. В. Крылов, Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В аксиоматике теории вероятностей, предложенной Колмогоровым, основным «вероятностным» объектом является понятие вероятностной модели, или вероятностного пространства, как тройки $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, где Ω — пространство элементарных событий, или исходов, $\mathscr{F}$ — σ-алгебра подмножеств Ω, объявляемых событиями, и $\mathbf{P}$ — вероятностная мера, или вероятность на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$. Эта общепринятая система аксиом теории вероятностей оказалась столь удачной, что, наряду с ее простотой, позволила не только охватить классические разделы теории вероятностей, но и открыла путь к развитию ее новых глав, в частности, теории случайных процессов.

В теории случайных процессов глубоко изучены различные классы процессов — построена теория процессов с независимыми приращениями, теория марковских процессов, теория стационарных процессов и др. В становлении и развитии теории случайных процессов значительным событием являлось осознание того, что построение «общей теории случайных процессов» требует введения, в дополнении к тройке $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ потока σ-алгебр (фильтрации) $\mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant0}$, где $\mathscr{F}_t$ интерпретируется как совокупность событий из $\mathscr{F}$, наблюдаемых до момента времени t.

Именно с предположением о наличии на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ потока $\mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant0}$ связано возникновение таких объектов, являющихся ингредиентами теории стохастического исчисления, как марковские моменты, или моменты остановки, согласованные, или адаптированные процессы, опциональные и предсказуемые σ-алгебры, мартингалы, локальные мартингалы, семимартингалы, стохастический интеграл, формула замены переменных Ито и т. д.

Таким образом, стохастическое исчисление аксиоматизирует, что в основе всех рассмотрений лежит понятие стохастического базиса

$$\mathscr{B} = (\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathbf{P}),$$

где $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, а $\mathbf{F}$ — некоторый выделенный поток σ-алгебр.

Формирование понятия «стохастический базис» как одной из спецификаций вероятностного пространства прошло через многие этапы рассмотрения частных случаев, уточнений, обобщений и т. п. При этом ключевым здесь явилась теория стохастического интегрирования по броуновскому движению и центрированной пуассоновской мере, развитая К. Ито.

В первой главе настоящего тома дается введение в стохастическое исчисление, призванное дать представление о различных аспектах теории броуновского движения и ее связи с теорией уравнений с частными производными, ведущей свое начало с классической работы А. Н. Колмогорова «Аналитические методы в теории вероятностей».

Теория стохастического интегрирования оттачивалась во многом на случайных процессах, являющихся решениями стохастических дифференциальных уравнений, представляющих, как сейчас бы сказали, частный случай семимартингалов — того широкого класса случайных процессов, для которых стохастическое исчисление дает мощный метод их анализа.

Вторая глава посвящается именно теории стохастических дифференциальных уравнений, а также стохастическим эволюционным уравнениям и стохастическому исчислению вариаций (или исчислению Маллявэна), являющегося весьма эффективным вероятностным аппаратом изучения в теории уравнений с частными производными, теоретической физике, эргодической теории.

Собственно общей теории стохастического исчисления на вероятностных пространствах с фильтрациями посвящается третья глава, дающая представление об основных элементах общей теории случайных процессов, стохастического интегрирования по семимартингалам и ряду их применений.

Идеи и методы стохастического исчисления нашли и находят свое применение в разнообразных разделах теории вероятностей и математической статистики. Это иллюстрируется, в частности, четвертой главой, в которой методы теории мартингалов и стохастического исчисления применяются к изучению вопросов слабой сходимости случайных процессов, рассматриваемых как случайные элементы со значениями в метрических пространствах.

В заключение данного предисловия укажу, что коллектив авторов данного тома, С. В. Анулова, А. Ю. Веретенников, Н. В. Крылов, Р. Ш. Липцер и А. Н. Ширяев следующим образом принимали участие в его написании: Гл. 1 — Н. В. Крылов; Гл. 2.I. §§ 1, 3, 4; Гл. 2. II; Гл. 2. III — А. Ю. Веретенников; Гл. 2.I. §§ 2, 5, 6 — С. В. Анулова; Гл. 3 — Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, Гл. 4. II — Р. Ш. Липцер, Гл. 4. I — А. Н. Ширяев.

А. Н. Ширяев

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Броуновское движение и винеровский процесс

1. В 1826 году английский ботаник Броун заметил, что находящиеся в жидкости микроскопические частицы двигаются (как потом стало ясно, под влиянием ударов молекул жидкости) беспорядочным образом. Как выяснилось, характеристики этого движения, такие, например, как среднеквадратичное отклонение за единицу времени от начального положения, зависят от температуры жидкости, ее вязкости и других физических параметров. Это делало открытое Броуном явление, названное впоследствии броуновским движением, интересным с точки зрения физики. На физическом уровне строгости броуновское движение изучалось Эйнштейном, Смолуховским, Башелье. Строго математическая модель броуновского движения была впервые построена в 1923 г. Винером, в честь которого соответствующий случайный процесс также называется *винеровским*. Винер построил модель броуновского движения как меру в пространстве непрерывных функций, хотя понадобилось еще 10 лет для того, чтобы теория меры, благодаря аксиоматике Колмогорова, стала общепризнанной базой в теории вероятностей.

Реальное броуновское движение и его модель — винеровский процесс — трехмерны. Любая из координат трехмерного винеровского процесса называется одномерным винеровским процессом.

Математическое определение одномерного винеровского процесса дается следующим образом. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство и при $t \geqslant 0$ на Ω определен гауссовский процесс $W_t(\omega)$, непрерывный по t при почти всяком ω и такой, что $\mathbf{E}W_t = 0$, $\mathbf{E}W_tW_s = t \wedge s$ при всех t, $s \geqslant 0$. Тогда говорят, что W_t — *одномерный винеровский процесс*.

Иногда добавляют, что W_t — *стандартный* процесс, когда хотят подчеркнуть, что $\mathbf{E}W_tW_s$ не только пропорционально $t\wedge s$, но и равно последнему. В том случае, когда условия данного определения выполняются только при t, $s\in[0, T]$, где постоянная $T\in(0, \infty)$, говорят о винеровском процессе на отрезке $[0, T]$. В дальнейшем, если специально не оговорено противное, говоря о винеровском процессе, будем всегда иметь в виду одномерный (стандартный) винеровский процесс.

Приведенное определение винеровского процесса хорошо согласуется с физической природой броуновского движения на малом промежутке времени или в бесконечном во все стороны сосуде. В самом деле, гауссовость естественно объясняется эффектом большого числа «равнозначных» воздействий молекул на взвешенную частицу, ее среднее отклонение от начального положения естественно должно быть равно нулю. Кроме того, начальное положение частицы естественно взять за начало координат: $W_0=0$, а так как приращения положения частицы за непересекающиеся интервалы времени одинаковой длины естественно должны быть независимы и иметь одинаковую дисперсию из-за однородности по времени и пространству рассматриваемой жидкости, то $\mathbf{E}|W_t-W_s|^2$ должно быть пропорционально $|t-s|$. Выбирая коэффициент пропорциональности равным 1 (например, за счет изменения масштаба времени или длины), получаем $|t-s|=\mathbf{E}|W_t-W_s|^2=\mathbf{E}W_t^2-2\mathbf{E}W_tW_s+\mathbf{E}W_s^2$, что при $s=0$ дает $\mathbf{E}W_t^2=t$. Отсюда $2\mathbf{E}W_tW_s=\mathbf{E}W_t^2+\mathbf{E}W_s^2-|t-s|=t+s-|t-s|=2(t\wedge s)$ при любых t, $s\geqslant 0$.

2. Для того, чтобы убедиться в *существовании винеровского процесса*, удобно использовать ряды Фурье и такой весьма частый случай теорем вложения классов Бесова (см. Никольский [18, стр. 279]).

Лемма 1.1. Пусть заданы числа $\alpha<1/p$, $p\in[1, \infty)$. Тогда существует постоянная c_0, такая, что для любой измеримой на $[0, \pi]$ функции $f(t)$ при почти всех t, $s\in[0, \pi]$

$$|f(t)-f(s)|\leqslant c_0|t-s|^{\alpha-\frac{1}{p}}\left(\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+\alpha p}}\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.1)$$

Теорема 1.1. Пусть $\eta_0(\omega)$, $\eta_1(\omega)$, ... — независимые, нормальные случайные величины на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ такие, что $\mathbf{E}\eta_k=0$, $\mathbf{E}\eta_k^2=1$. Тогда для некоторой целочисленной последовательности $N(k)\to\infty$ функции

$$W_t^k:=\frac{1}{\sqrt{\pi}}t\eta_0+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{N(k)}\eta_n\frac{1}{n}\sin nt, \quad (1.2)$$

сходятся равномерно по $t\in[0, \pi]$ и их (п. н. непрерывный) предел является винеровским процессом на $[0, \pi]$.

Доказательство. Из равенства Парсеваля для разложений в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$ функций $I(|x|<t)$, $I(|x|<s)$ как функций от x следует, что при $t, s \in [0, \pi]$

$$\frac{1}{\pi}(t-s)^2 + \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\sin nt - \sin ns)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[I(|x|<t) - I(|x|<s)]^2\,dx = |t-s|. \qquad (1.3)$$

Возьмем далее $\alpha \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ и положим

$$c(n) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{|t-s|^{1+4\alpha}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}(\sin kt - \sin ks)^2\right)^2 dt\,ds.$$

Из (1.3) следует, что

$$c(1) \leqslant \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{|t-s|^{4\alpha-1}}\,dt\,ds < \infty.$$

Следовательно, $c(n) \to 0$ при $n \to \infty$, и можно определить $N(k)$ так, чтобы $c(N(k)) \leqslant 2^{-k}$. Теперь обозначим $\delta_t^k = W_t^{k+1} - W_t^k$. Тогда по лемме 1.1 при $p=4$, $s=0$, учитывая простую связь между вторым и четвертым моментом гауссовских величин, заключаем

$$\mathbf{E}\sup_{t\in[0,\pi]}|\delta_t^k|^4 \leqslant c_0^4\pi^{4\alpha-1}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{|t-s|^{1+4\alpha}}\,\mathbf{E}|\delta_t^k - \delta_s^k|^4\,dt\,ds =$$

$$= c_1\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{|t-s|^{1+4\alpha}}\left(\sum_{N(k)+1}^{N(k+1)}\frac{1}{n^2}(\sin nt - \sin ns)^2\right)^2 dt\,ds \leqslant$$

$$\leqslant c_2 c(N(k)) \leqslant c_2 2^{-k}, \qquad (1.4)$$

где c_2 не зависит от k. Отсюда и из неравенства Гёльдера следует, что величина

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{t\in[0,\pi]}|W_t^{k+1} - W_t^k|,$$

имеет конечное ожидание и потому конечна (п. н.). Тем самым доказано, что последовательность (1.2) в самом деле сходится равномерно по t (п. н.) к некоторому непрерывному процессу, который мы обозначим W_t. Очевидно, W_t — гауссовский процесс, $\mathbf{E}W_t = 0$. Наконец, из (1.3) получаем $\mathbf{E}|W_t - W_s|^2 = |t-s|$, $\mathbf{E}W_t^2 = t$, $\mathbf{E}W_s^2 = s$, $\mathbf{E}W_tW_s = t\wedge s$, что и требовалось.

С помощью винеровского процесса на $[0, \pi]$ можно построить винеровский процесс на $[0, \infty)$, склеивая независимые экземпляры процессов W_t^n, $t\leqslant\pi$, $n\geqslant 0$ (каждый из которых задается, например, рядом вида (1.2)) по правилу

$$W_t=\begin{cases} W_t^0, & 0\leqslant t<\pi,\\ W_\pi^0+W_{t-\pi}^1, & \pi\leqslant t<2\pi,\\ W_\pi^0+W_\pi^1+W_{t-2\pi}^2, & 2\pi\leqslant t<3\pi, \text{ и т. д.}\end{cases}$$

3. Винеровский процесс играет весьма важную роль в теории случайных процессов, и поэтому изучению его свойств было уделено значительное внимание. Перечислим лишь некоторые из них и укажем, что большую информацию о свойствах винеровского процесса читатель сможет найти, например, в книге Ито, Маккин [13].

Теорема 1.2. Следующие утверждения эквивалентны:

1. W_t — винеровский процесс;

2. W_t — непрерывный процесс (п. н.) такой, что а) $W_0=0$ (п. н.), б) $W_t-W_s\sim\mathcal{N}(0,|t-s|)$*), в) $W_{t_1}, W_{t_2}-W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}-W_{t_{n-1}}$ независимы при любых $0\leqslant t_1\leqslant\ldots\leqslant t_n$;

3. W_t — непрерывный процесс (п. н.) такой, что а) $W_0=0$ (п. н.), б) $W_t-W_s\sim\mathcal{N}(0, |t-s|)$, в) для любых $0\leqslant t_1\leqslant\ldots\leqslant t_n$ случайная величина $W_{t_n}-W_{t_{n-1}}$ не зависит от $(W_{t_1},\ldots,W_{t_{n-1}})$.

Глубокие свойства, показывающие сильную *нерегулярность* траекторий винеровского процесса, были найдены А. Я. Хинчиным и П. Леви.

Теорема 1.3 (закон повторного логарифма, А. Я. Хинчин). С вероятностью 1

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}}=1,\quad \underline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}}=-1.$$

Теорема 1.4 (о модуле непрерывности П. Леви). С вероятностью 1,

$$\overline{\lim_{\substack{0\leqslant s<t\leqslant 1\\ u=t-s\to 0}}}\frac{|W_t-W_s|}{\sqrt{2u\ln\frac{1}{u}}}=1.$$

Теоремы 1.3, 1.4 показывают, что $|W_r|\leqslant C(\omega)\sqrt{2r\ln\ln\frac{1}{r}}$, $|W_t-W_s|\leqslant C(\omega)\sqrt{2|t-s|\ln\frac{1}{|t-s|}}$ при $0\leqslant t, s, r\leqslant 1$, причем $C(\omega)$ может быть взято сколь угодно близким к 1 справа, если $|t-s|$, r достаточно малы. Доказательства теорем 1.3, 1.4 до-

*) Запись $\xi\sim\mathcal{N}(a,b)$ означает, что случайная величина имеет нормальное (гауссовское) распределение с математическим ожиданием a и дисперсией b.

статочно сложны. Поэтому полезно иметь в виду, что из леммы 1.1 легко получить несколько более грубые результаты: если фиксировать постоянную $\varepsilon\in(0, 1/2)$, то для почти всякого ω найдется $C(\omega)<\infty$ такое, что $|W_t-W_s|\leqslant C(\omega)|t-s|^{(1/2)-\varepsilon}$ при всех $0\leqslant t, s\leqslant 1$, в частности, $|W_t|\leqslant C(\omega)t^{(1/2)-\varepsilon}$. Действительно, достаточно в лемме 1.1 взять $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}$, $p=\frac{2}{\varepsilon}$, $f(t)=W_t$, и заметить, что интеграл справа в (1.1) при почти всех ω конечен, так как $\mathbf{E}|W_x-W_y|^p=N|x-y|^{p/2}$, где $N=\mathbf{E}|\xi|^p$, $\xi\sim\mathcal{N}(0, 1)$, откуда

$$\mathbf{E}\int_0^1\int_0^1\frac{|W_x-W_y|^p}{|x-y|^{1+\alpha p}}dxdy=N\int_0^1\int_0^1 1dxdy<\infty.$$

Еще одно свойство, показывающее нерегулярность траекторий винеровского процесса и играющее важную роль в теории интеграла Ито, носит название *теоремы о квадратичной вариации*.

Теорема 1.5. Пусть $0\leqslant s<t<\infty$, $s=t_{0,n}\leqslant t_{1,n}\leqslant\ldots\leqslant t_{k_n,n}=t$ — последовательность разбиений $[s, t]$, диаметр которых стремится к нулю при $n\to\infty$. Пусть W_t, b_t — два независимых винеровских процесса. Тогда при $n\to\infty$ по вероятности

$$\sum_0^{k_n-1}(W_{t_{i+1,n}}-W_{t_{i,n}})^2\to t-s,$$

$$\sum_0^{k_n-1}(W_{t_{i+1,n}}-W_{t_{i,n}})(b_{t_{i+1,n}}-b_{t_{i,n}})\to 0.$$

Доказательство этой теоремы вполне элементарно и основано на том, что дисперсии рассматриваемых сумм легко считаются и оказывается, что они стремятся к нулю.

Из теоремы о квадратичной вариации вытекает, что с вероятностью 1 обычная вариация винеровской траектории по $[s, t]$ равна бесконечности. Действительно,

$$\sum_0^{k_n-1}(W_{t_{i+1,n}}-W_{t_{i,n}})^2\leqslant\max_i|W_{t_{i+1,n}}-W_{t_{i,n}}|\operatorname*{Var}_{[s,t]}W_r\to 0\neq t-s$$

при $n\to\infty$ на тех ω, для которых $\operatorname*{Var}_{[s,t]}W_r(\omega)<\infty$.

С точки зрения теории функций действительной переменной почти всякая траектория W_t обладает довольно экзотическими свойствами нерегулярности. Однако они же позволяют некоторым функционалам от винеровской траектории обладать необычной регулярностью. Например, если функция $f(x)$ является только борелевской локально суммируемой в квадрате, то

$$\int_0^1 f(x+h_t)\,dt$$

не будет даже непрерывной функцией от x, если h_t — гладкая функция от t. В то же время при почти всяком ω функция

$$\int_0^1 f(x+W_t)\,dt$$

абсолютно непрерывна по x, и ее производная по x интегрируема в квадрате по x по любому конечному отрезку изменения x. Иначе говоря, W_t «сглаживает» f. Доказывается это с помощью продолжения с гладких f на негладкие и следующих выкладок, которые получаются с помощью преобразования Фурье:

$$\mathbf{E}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^1 f'(x+W_t)\,dt\right)^2 dx=\mathbf{E}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\xi\tilde{f}(\xi)\int_0^1 e^{i\xi W_t}dt\right|^2 d\xi=$$

$$=2\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2|\tilde{f}(\xi)|^2\,\mathbf{E}\int_0^1 ds\int_0^s dt e^{i\xi(W_s-W_t)}d\xi=$$

$$=2\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2|\tilde{f}(\xi)|^2\int_0^1 ds\int_0^s dt e^{-\frac{1}{2}\xi^2(s-t)}d\xi=$$

$$=4\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(\xi)|^2\int_0^1\left(1-e^{-\frac{1}{2}\xi^2 s}\right)ds d\xi\leqslant 4\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi=$$

$$=4\int_{-\infty}^{\infty}f^2(x)\,dx,$$

где $\tilde{f}$ — преобразование Фурье f.

4. Физические представления о природе винеровского процесса подсказывают, что он должен играть роль предельного процесса для случайных ломаных и такую же роль, какую играет гауссовское распределение для сумм независимых одинаково распределенных величин. Для пояснения этого рассмотрим простейшую модель, описывающую процесс перемещения некоторой точки — частицы под ударами других. Пусть η_k, $k=1, 2, \ldots$ — независимые, одинаково распределенные величины с $\mathbf{E}\eta_k=0$, $\mathbf{E}\eta_k^2=1$. Фиксируем целое $n\geqslant 1$ и пусть в моменты времени кратные $1/n$ наша частица испытывает воздействие, перемещающее ее на $\eta_k/\sqrt{n}$, где k — номер воздействия. Пусть в начальный момент частица находится в нуле, $S_k=\eta_1+\ldots+\eta_k$. Тогда в моменты времени k/n частица будет находиться в точке $S_k/\sqrt{n}$ и будет оставаться в этой точке на

промежутке времени $[k/n, (k+1)/n)$. Так как движение реальной частицы имеет непрерывную траекторию, то мы изменим построенную кусочно-постоянную траекторию на кусочно-линейную, сохраняя ее положение в моменты времени k/n. Так мы приходим к процессу

$$\xi_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]} + (nt - [nt]) \frac{1}{\sqrt{n}} \eta_{[nt]+1}.$$

Этот процесс дает приблизительное представление об одномерном броуновском движении, а более полное представление должно получаться при $n \to \infty$. Кстати говоря, именно желание устремить n к бесконечности привело к интервалам между взаимодействиями длины $\frac{1}{n}$ и перемещению в момент удара на $\eta_n/\sqrt{n}$, так как при этом по центральной предельной теореме ξ_t^n асимптотически нормально с параметрами $(0, t)$.

Как и в центральной предельной теореме, далее речь пойдет не о сходимости ξ_t^n при $n\to\infty$ к некоторому процессу, а о сходимости *распределений* процессов $\xi_\cdot^n$ к распределению винеровского процесса. Пусть $C[0, 1]$ — метрическое пространство всех действительных непрерывных функций на $[0, 1]$ с расстоянием между двумя элементами $x_\cdot$, $y_\cdot$ этого пространства, определяемым по формуле

$$\rho(x_\cdot, y_\cdot) = \sup\{|x_t - y_t| : t\in[0, 1]\}.$$

Возьмем в $C[0, 1]$ σ-алгебру борелевских множеств. Тогда оказывается, что $\xi_\cdot^n$ и $W_\cdot$ являются случайными элементами со значениями в $C[0, 1]$. Случайные элементы $\xi_\cdot^n$, $W_\cdot$ имеют распределения на $C[0, 1]$, т. е. соответствующие меры на борелевских подмножествах $C[0, 1]$:

$$F_{\xi_\cdot^n}(A) = \mathbf{P}(\xi_\cdot^n \in A), \quad F_{W_\cdot}(A) = \mathbf{P}(W_\cdot \in A).$$

Напомним еще, что последовательность мер μ_n на борелевских множествах некоторого метрического пространства X называется *слабо сходящейся* к мере μ, если для всех непрерывных ограниченных функций f на X

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f(x)\mu_n(dx) = \int_X f(x)\mu(dx).$$

Следующая теорема, являющаяся аналогом центральной предельной теоремы, носит название *функциональной предельной теоремы,* а также не очень удачное название «принципа инвариантности». Она имеет огромное как теоретическое, так и прикладное значение.

Теорема 1.6 (Донскер). Последовательность распределений $F_{\xi_\cdot^n}$ слабо сходится к $F_{W_\cdot}$ на $C[0, 1]$.

Эта теорема имеет обобщения на широкий класс процессов, отличных от ξ_t^n (см. ниже гл. 4).

В качестве примера применения теоремы Донскера найдем распределение случайной величины $\zeta=\max\{W_t,\ t\in[0, 1]\}$. Так как $\max\{x_t,\ t\in[0, 1]\}$ есть непрерывная функция от x на $C[0, 1]$, то по теореме Донскера распределения случайных величин $\zeta^n=\max\{\xi_t^n,\ t\in[0, 1]\}$ слабо сходятся к распределению ζ.

Весьма существенно, что при этом ξ_t^n можно строить по любым независимым величинам η_k, удовлетворяющим условиям $\mathrm{E}\eta_k=0$, $\mathrm{E}\eta_k^2=1$. Возьмем η_k так, чтобы $\mathbf{P}\{\eta_k=1\}=$ $=\mathbf{P}\{\eta_k=-1\}=\frac{1}{2}$. Тогда вероятность появления каждой фиксированной ломаной в качестве реализации ξ_t^n на $[0, 1]$ одна и та же и равна 2^{-n}. Кроме того, число ломаных, благоприятствующих осуществлению событий

$$\left\{\zeta^n\geqslant\frac{i}{\sqrt{n}},\ \xi_1^n<\frac{i}{\sqrt{n}}\right\},\quad \left\{\zeta^n\geqslant\frac{i}{\sqrt{n}},\ \xi_1^n>\frac{i}{\sqrt{n}}\right\},$$

где целое $i>0$, одинаково. Показывается это с помощью *«принципа отражения»* (Д. Андре), когда каждая ломаная, подходящая для первого события, не меняется до момента достижения уровня $i/\sqrt{n}$, а затем симметрично отражается относительно этого уровня и переходит в ломаную, благоприятствующую второму событию. При этом возникает взаимно однозначное соответствие. Следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{\zeta^n\geqslant\frac{i}{\sqrt{n}},\ \xi_1^n<\frac{i}{\sqrt{n}}\right\}=\mathbf{P}\left\{\zeta^n\geqslant\frac{i}{\sqrt{n}},\ \xi_1^n>\frac{i}{\sqrt{n}}\right\},$$

Кроме того, очевидно,

$$\mathbf{P}\left\{\zeta^n\geqslant\frac{i}{\sqrt{n}},\ \xi_1^n>\frac{i}{\sqrt{n}}\right\}=\mathbf{P}\left\{\xi_1^n>\frac{i}{\sqrt{n}}\right\},$$

$$\mathbf{P}\left\{\zeta^n\geqslant\frac{i}{\sqrt{n}}\right\}=\mathbf{P}\left\{\zeta^n\geqslant\frac{i}{\sqrt{n}},\ \xi_1^n>\frac{i}{\sqrt{n}}\right\}+$$

$$+\mathbf{P}\left\{\zeta^n\geqslant\frac{i}{\sqrt{n}},\ \xi_1^n<\frac{i}{\sqrt{n}}\right\}+\mathbf{P}\left\{\xi_1^n=i/\sqrt{n}\right\}.$$

Отсюда

$$\mathbf{P}\left\{\zeta^n\geqslant\frac{i}{\sqrt{n}}\right\}=2\mathbf{P}\left\{\xi_1^n>\frac{i}{\sqrt{n}}\right\}+\mathbf{P}\left\{\xi_1^n=i/\sqrt{n}\right\}$$

при целом $i>0$. При $i=0$ это равенство очевидно. Далее имеем

$$\mathbf{P}\{\zeta^n=i/\sqrt{n}\}=\mathbf{P}\{\zeta^n\geqslant i/\sqrt{n}\}-\mathbf{P}\{\zeta^n\geqslant(i+1)/\sqrt{n}\}=$$
$$=2\mathbf{P}\left\{\xi_1^n=\frac{i+1}{\sqrt{n}}\right\}+\mathbf{P}\left\{\xi_1^n=\frac{i}{\sqrt{n}}\right\}-\mathbf{P}\left\{\xi_1^n=\frac{i+1}{\sqrt{n}}\right\}=$$
$$=\mathbf{P}\left\{\xi_1^n=\frac{i+1}{\sqrt{n}}\right\}+\mathbf{P}\left\{\xi_1^n=\frac{i}{\sqrt{n}}\right\},\quad i\geqslant 0, \tag{1.5}$$
$$\mathbf{E}f(\zeta^n)=\mathbf{E}f\left(\xi_1^n-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\mathbf{E}f(\xi_1^n),\quad \mathbf{E}f(\zeta)=2\mathbf{E}f(W_1),$$
$$\mathbf{P}\{\max_{t\leqslant 1}W_t\geqslant x\}=2\mathbf{P}\{W_1\geqslant x\},\quad x\geqslant 0,$$

где f — любая непрерывная ограниченная функция, равная нулю на отрицательной полуоси.

Формула (1.5) и дает искомое распределение. Вообще,

$$\mathbf{P}\{\max_{t\leqslant T}W_t\geqslant x\}=2\mathbf{P}\{W_T\geqslant x\}=\sqrt{\frac{2}{\pi T}}\int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2T}}dy, \tag{1.6}$$

где $x\geqslant 0$, $T>0$. Вытекает это, например, из (1.5) и элементарного свойства автомодельности W_t, которое говорит, что $c^{-1}W_{c^2t}$ — винеровский процесс для любой постоянной $c\neq 0$. Не намного сложнее следующий факт, который позволяет исследование поведения W_t при больших t свести к исследованию этого поведения при малых t.

Теорема 1.7. Если W_t — винеровский процесс, то $tW_{1/t}$ — винеровский процесс при $t>0$. Кроме того, $tW_{1/t}\to 0$ (п. н.) при $t\downarrow 0$.

Возвращаясь к (1.6), найдем еще распределение момента первого достижения τ_x процессом W_t уровня x. Так как $\{\tau_x\leqslant T\}=\{\max_{t\leqslant T}W_t\geqslant x\}$, то

$$\mathbf{P}\{\tau_x\leqslant T\}=\sqrt{\frac{2}{\pi T}}\int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2T}}dy=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{x/\sqrt{T}}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy,\ T>0,\ x\geqslant 0. \tag{1.7}$$

Это так называемое распределение Вальда, играющее важную роль в теории вероятностей, математической статистике и, как ни странно, в теории параболических и эллиптических уравнений в частных производных. Оно имеет плотность, равную

$$\frac{x}{\sqrt{2\pi T^3}}e^{-\frac{x^2}{2T}}.$$

Из вида этой плотности следует, что $\mathbf{E}\tau_x^\alpha<\infty$ для $x>0$ только при $\alpha\in(0,\ 1/2)$.

§ 2. Вероятностная конструкция решения уравнения теплопроводности. Связь винеровского процесса с оператором Лапласа

1. Броуновское движение вызывается тепловым движением молекул. С последним, как известно, связано также уравнение теплопроводности вида

$$u_t+\frac{1}{2}u_{xx}+f=0. \tag{2.1}$$

Поэтому неудивительно, что винеровский процесс связан с уравнением (2.1). В простейшем случае задачи Коши для уравнения (2.1), когда оно рассматривается в полосе $(t, x)\in(0, T)\times E_1$ с граничным условием

$$u(T, x)=g(x),\quad x\in E_1, \tag{2.2}$$

эта связь устанавливается очень простым способом. В самом деле,

$$\mathbf{E}\left[\int\limits_0^{T-t} f(t+s, x+W_s)\,ds+g(x+W_{T-t})\right]=$$

$$=\int\limits_0^{T-t}\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\int f(t+s, x+y)\,e^{-\frac{y^2}{2s}}dy\,ds+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int g(x+y)\,e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}}dy, \tag{2.3}$$

и последнее выражение, как известно из теории дифференциальных уравнений, является решением задачи (2.1)—(2.2), если, например, g, f ограничены, g — непрерывна, f — удовлетворяет условию Гёльдера по (t, x) с некоторым показателем $\alpha\in(0, 1)$. Левая часть (2.3) является частным случаем общей формулы, которая годится и для представления решения u уравнения (2.1) в произвольной области $Q\subset(0, \infty)\times E_1$, ограниченной по оси t. Оказывается, что в широких предположениях при $(t, x)\in Q$

$$u(t, x)=\mathbf{E}\left[\int\limits_0^{\tau(t, x)} f(t+s, x+W_s)\,ds+u(t+\tau(t, x), x+W_{\tau(t, x)})\right], \tag{2.4}$$

где $\tau(t, x)$ — момент первого выхода «теплового» процесса $(t+s, x+W_s)$, как функции от $s\in(0, \infty)$, из области Q. В свою очередь формула (2.4) является весьма частным случаем вероятностного представления решений вырождающихся эллиптических и параболических уравнений. Подобные формулы легче всего получать с помощью замечательной формулы Ито, о которой пойдет речь в следующем параграфе. Однако для частного случая теплового процесса в справедливости формулы (2.4) можно убедиться и иначе, используя следующую схему рассуждений.

Пусть, например, $Q \subset (0, T) \times E_1$, а функцию u можно распространить вне Q на все $[0, T] \times E_1$ до гладкой функции, которую также будем обозначать u. Определим f всюду в $(0, T) \times E_1$ по формуле (2.1). Тогда, как сказано выше, $u(t, x)$ равно левой части (2.3) с $g(x) = u(T, x)$. Отсюда

$$u(t, x) = \mathbf{E} \int_0^{\tau(t,x)} f(t+s, x+W_s)\, ds + \mathbf{E} \left[\int_0^{T-\tau(t,x)-t} f(t+\tau(t, x)+s,\right.$$

$$x + W_{\tau(t,x)} + (W_{\tau(t,x)+s} - W_{\tau(t,x)}))\, ds + g(x + W_{\tau(t,x)} +$$

$$\left. + (W_{T-\tau(t,x)-t+\tau(t,x)} - W_{\tau(t,x)}))\right]. \tag{2.5}$$

Во втором математическом ожидании $(\tau(t, x),\ W_{\tau(t,x)})$ и процесс $W_{\tau(t,x)+s} - W_{\tau(t,x)}$ независимы и последний процесс является винеровским. Это утверждение (так называемое *строго марковское свойство* винеровского процесса) является утверждением типа теоремы 1.2. Поэтому второе слагаемое в (2.5) равно

$$\mathbf{E}\mathbf{E} \left[\int_0^{T-r} f(r+s, y+W_s)\, ds + g(y+W_{T-r}) \right] \Bigg|_{\substack{r=t+\tau(t,x)\\ y=x+W_{\tau(t,x)}}} =$$

$$= \mathbf{E} u(t+\tau(t, x), x+W_{\tau(t,x)}),$$

причем, последнее получается из равенства $u(t, x)$ левой части (2.3).

Равенства типа формулы (2.4) интересны как с точки зрения теории вероятностей, так и с точки зрения теории дифференциальных уравнений. Например, пусть нас интересует среднее время, которое понадобится винеровскому процессу для того, чтобы выйти из интервала $(-a, b)$, где $a > 0$, $b > 0$. Пусть τ — момент первого выхода W_t из $(-a, b)$, $Q = (0, T) \times \times (-a, b)$, $u(t, x) = u(x) = (b-x)(x+a)$. Тогда $f = 1$, $\tau(0, 0) = = \tau \wedge T$, и в силу (2.4)

$$ab = u(0, 0) = \mathbf{E}[\tau \wedge T + u(W_{\tau \wedge T})]. \tag{2.6}$$

Из формулы (1.7) следует, что $\tau = (\tau_b \wedge \tau_{-a})$ конечна с вероятностью 1, а так как $u(W_\tau) = 0$, если $\tau < \infty$, то полагая $T \to \infty$, из (2.6) заключаем $\mathbf{E}\tau = ab$.

Формула (2.4) показывает, что решение уравнения (2.1) в области Q однозначно определяется по f и по значениям u только в тех точках ∂Q, которые можно соединить хотя бы с одной точкой $(t, x) \in Q$ непрерывной кривой вида $(t+s, x+x_s)$,

$s \geqslant 0$, где $x_0=0$. Этот факт относится уже к теории дифференциальных уравнений и выделяет так называемую параболическую границу Q.

Вот еще одно простое применение формулы (2.4) к теории дифференциальных уравнений:

Теорема 2.1. (А. Н. Тихонов). Пусть функция $u(t, x)$ непрерывна в $[0, T]\times E_1$, имеет непрерывные по (t, x) производные вида u_t, u_{xx} в $(0, T)\times E_1$, и, кроме того, $u_t+\frac{1}{2}u_{xx}=0$ в $(0, T)\times E_1$, $u(T, x)=0$, $|u(t, x)|\leqslant\exp(cx^2)$, где $c\in(0, \infty)$. Тогда $u\equiv 0$ в $[0, T]\times E_1$.

Доказательство. Из-за возможности менять начало координат достаточно доказать, что $u(s, 0)=0$ при $s\in[0, T)$. Выбирая в качестве Q прямоугольник $(0, T)\times(-x, x)$, где $x>0$, по формуле (2.4) находим

$$u(s, 0)=\mathrm{E}u(s+\tau_x, x)I(\tau_x<\tau_{-x}\wedge(T-s))+$$
$$+\mathrm{E}u(s+\tau_{-x}, -x)I(\tau_{-x}<\tau_x\wedge(T-s)).$$

Отсюда и из (1.7) при $s\in[T-(4c)^{-1}, T)$, $s\geqslant 0$,

$$|u(s, 0)|\leqslant\frac{2x}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{T-s}r^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{2r}}e^{cx^2}dr\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2x}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{T-s}r^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4r}}dr=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{T-s}{\sqrt{x}}}r^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{4r}}dr,$$

так как $c-1/2r\leqslant-1/4r$ при $r\in(0, T-s)$. Последнее стремится к нулю при $x\to\infty$. Стало быть, $u(s, 0)=0$ при $s\in[T-(4c)^{-1}, T)$, $s\geqslant 0$. Аналогично, $u(s, x)=0$ при этих же s и всех x. Мы доказали, что если $u=0$ при $s=T$, то $u=0$ в полосе $x\in E_1$, $s\in[T-(4c)^{-1}, T)$, $s\geqslant 0$. Если в предыдущих рассуждениях взять $(T-(4c)^{-1})\vee 0$ вместо T, то мы получим, что $u=0$ в полосе, лежащей еще ближе к началу координат. За конечное число подобных шагов мы увидим, что $u=0$ в $[0, T]\times E_1$, что и требовалось.

Формула (2.4) имеет многомерный аналог. В самом деле, назовем d-мерным винеровским процессом d-мерный процесс $W_t=(W_t^1, \ldots, W_t^d)$, если W_t^i — винеровский (одномерный) процесс при $i=1, \ldots, d$, и процессы $W_\cdot^1, \ldots, W_\cdot^d$ независимы. Оказывается, что если $u(t, x)$, $t\in[0, T]$, $x\in E_d$, является решением уравнения

$$u_t+\frac{1}{2}\Delta u+f=0\quad\left(\Delta=\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{(\partial x^d)^2}\right)\tag{2.7}$$

в $[0, T]\times E_d$ и $u(T, x)=g(x)$ на E_d, то при естественных предположениях $u(t, x)$ совпадает с левой частью (2.3), где W_t — d — мерный винеровский процесс. Показывается это с помощью формулы, аналогичной (2.3). Естественно, что формула (2.4) вместе с ее выводом также переносится на многомерный случай.

2. Далее, пусть $\mathscr{D}$ — ограниченная область в E_d, u — достаточно регулярное решение уравнения

$$\frac{1}{2}\Delta u+f(x)=0 \tag{2.8}$$

в $\mathscr{D}$, u непрерывна в $\bar{\mathscr{D}}$ и $u=g$ на $\partial\mathscr{D}$. Тогда при $x\in\mathscr{D}$

$$u(x)=\mathbf{E}\left[\int_0^{\tau(x)} f(x+W_t)\,dt+g(x+W_{\tau(x)})\right], \tag{2.9}$$

где $\tau(x)=\inf\{t:x+W_t\notin\mathscr{D}\}$. Объясняется это тем, что u не зависит от t, значит, $u_t+\frac{1}{2}\Delta u+f=0$, и по формуле (2.4) при $t=T$, $Q=(0,2T)\times\mathscr{D}$,

$$u(x)=\mathbf{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau(x)} f(x+W_t)\,dt+u(x+W_{T\wedge\tau(x)})\right].$$

Остается положить $T\to\infty$.

Формула (2.9) дает вероятностное представление решения уравнения Лапласа. Она столь же важна, как и формула (2.4). Покажем с ее помощью, например, что двумерный, а следовательно, также и одномерный винеровский процессы *возвратны*. Так как двумерный винеровский процесс обладает строго марковским свойством, то достаточно установить, что он с вероятностью 1 достигает любого круга на плоскости. Пусть $\tau_r(x)=\inf\{t:|x+W_t|=r\}$. Нам достаточно убедиться, что $\mathbf{P}\{\tau_r(x)<\infty\}=1$ при всех $r>0$, $x\in E_2$, $|x|>r$.

Поскольку $\Delta\ln|x|=0$, то при $R>|x|>r$ по формуле (2.9), применяемой к $u(x)=(\ln R-\ln|x|)(\ln R-\ln r)^{-1}$, находим

$$\frac{\ln R-\ln|x|}{\ln R-\ln r}=\mathbf{E}u(x+W_{\tau_r(x)\wedge\tau_R(x)})=\mathbf{P}\{\tau_r(x)<\tau_R(x)\}.$$

Это при $R\to\infty$ дает $1=\mathbf{P}\{\tau_r(x)<\lim\limits_{R\to\infty}\tau_R(x)\}=\mathbf{P}\{\tau_r(x)<\infty\}$.

С помощью формулы (2.9) можно также показать, что d-мерный винеровский процесс W_t при $d\geqslant 3$ невозвратен и, более того, $|W_t|\to\infty$ при $t\to\infty$ (п. н.).

§ 3. Интеграл Ито и правила дифференцирования сложных стохастических функций

1. Пусть $W_t=W_t(\omega)$, $t\geqslant 0$, $\omega\in\Omega$ — стандартный (одномерный) винеровский процесс на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$. Он достаточно хорошо описывает одномерное движение броуновской частицы при некоторой фикси-

рованной температуре. При другой постоянной температуре дисперсия броуновской частицы умножится на константу и для описания ее движения будет подходить процесс $fW_t(\omega)$, где $f=\text{const}$. Если же температура жидкости меняется со временем, но кусочно-постоянна и равна f_i на каждом интервале $[t_i, t_{i+1})$ некоторого разбиения $0=t_0\leqslant t_1\leqslant \ldots$ полуоси времени $[0, \infty)$, то положение одномерной броуновской частицы в момент времени t можно представить в виде

$$\sum_i f_i(W_{t\wedge t_{i+1}}-W_{t\wedge t_i}). \tag{3.1}$$

При переходе от кусочно-постоянных температур к непрерывно меняющимся выражение (3.1) превращается в стохастический интеграл

$$\int_0^t f_s dW_s. \tag{3.2}$$

Выражение (3.2) нельзя понимать как интеграл Стильтьеса при каждом фиксированном ω, так как $W_t(\omega)$ имеет неограниченную вариацию (см. § 1.1). Винер нашел способ определить интеграл от неслучайных функций f_t по W_t. Для гладких f_t он положил

$$\int_0^t f_s dW_s = f_t W_t - \int_0^t W_s f'_s ds. \tag{3.3}$$

Получившийся линейный оператор, определенный на гладких функциях f, оказывается, обладает тем свойством (изометрии), что

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t f_s dW_s\right)^2 = \int_0^t f_s^2 ds.$$

С помощью этого свойства стохастический интеграл распространялся с гладких функций на все $L_2[0, t]$.

Ито [23]—[25] в 40-х годах заметил, что стохастический интеграл по W_t распространяется на широкий класс функций f_t, зависящих и от «случая» ω, но «неупреждающим» образом. Он не только значительно расширил класс интегрируемых функций, но и доказал непрерывность интеграла по верхнему пределу, вывел правила действий со стохастическими интегралами, знаменитую «формулу Ито», и тем самым положил начало развитию стохастического анализа. Ито рассматривал не только интегралы по W_t, но и по пуассоновским, и по центрированным пуассоновским мерам.

Для описания конструкции Ито понадобится понятие винеровского процесса относительно потока σ-алгебр. Пусть для всякого $t\geqslant 0$ определена σ-алгебра $\mathcal{F}_t$ подмножеств Ω, причем

$\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}_s$ при $t\leqslant s$. Тогда говорят, что имеется (расширяющийся) поток σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t\}$. Винеровский процесс $W_t(\omega)$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ называется *винеровским относительно потока* $\{\mathcal{F}_t\}$, если величина W_t $\mathcal{F}_t$ — измерима при всяком $t\geqslant 0$ и W_s-W_t не зависит от $\mathcal{F}_t$ при всяких $t\leqslant s$. В этом случае также говорят, что $\{W_t, \mathcal{F}_t\}$ — винеровский процесс. Надо сказать, что всегда существует поток $\{\mathcal{F}_t\}$, относительно которого процесс W_t является винеровским. Из теоремы 1.2 следует, что можно взять, например, $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_t^W:=\sigma(W_s, s\leqslant t)$.

Действительный *случайный процесс* $f_t(\omega)$, $t\geqslant 0$, $\omega\in\Omega$, назовем *простым*, если существует разбиение $0=t_0\leqslant t_1\leqslant\ldots$ полуоси $[0,\infty)$ такое, что $f_t=f_{t_i}$ при $t\in[t_i, t_{i+1}$, $i=0, 1, \ldots,$ кроме того, если f_t $\mathcal{F}_t$ — измеримо при всяком t и если

$$\mathbf{E}\int_0^\infty |f_t|^2 dt<\infty. \tag{3.4}$$

Множество всех простых процессов обозначим через H_0.

Для простого процесса f_t положим

$$\int_0^\infty f_t dW_t=\sum_{i=0}^\infty f_{t_i}(W_{t_{i+1}}-W_{t_i}).$$

Ито берет за основу построения стохастического интеграла это выражение, аналогичное (3.1), а не формулу интегрирования по частям (3.3). С помощью элементарных и коротких вычислений показывается, что при $t\in H_0$

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\infty f_t dW_t\right)^2=\mathbf{E}\int_0^\infty |f_t|^2\, dt.$$

Это, очевидно, позволяет распространить стохастический интеграл на функции f, для которых найдется последовательность $f_n\in H_0$ такая, что

$$\mathbf{E}\int_0^\infty |f_t-f_{nt}|^2\, dt\to 0.$$

Иначе говоря, интегрируемы по Ито оказываются функции $f\in\bar{H}_0=:H$, где замыкание понимается в смысле гильбертова пространства $L_2(\Omega\times(0,\infty))$. Ито доказал, что множество H совпадает с множеством функций f_t $\mathcal{F}_t$ — измеримых при каждом t, измеримых по (ω, t) и таких, что справедливо неравенство (3.4) (точнее говоря, последнее множество как множество в $L_2(\Omega\times(0,\infty))$ совпадает с H).

Далее, интеграл в конечных пределах от s до t при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty$ определяется по формуле

$$\int_s^t f_r dW_r = \int_0^\infty f_r I(s \leqslant r \leqslant t) dW_r.$$

Интеграл в конечных пределах Ито распространил на класс функций более широкий, чем H. Обозначим через S множество всех действительных измеримых по (ω, t), $\mathscr{F}_t$ — измеримых при каждом t функций $f_t = f_t(\omega)$ таких, что

$$\int_0^T f_t^2 dt < \infty \text{ (п. н.)}$$

для любого постоянного $T > 0$. С помощью элементарных сведений из теории мартингалов Ито доказал, что при $f \in S$ процесс

$$\int_0^t f_s dW_s \tag{3.5}$$

имеет непрерывную по t модификацию. В дальнейшем под интегралом (3.5) всегда понимается непрерывный процесс. Основу распространения стохастического интеграла Ито с класса H на S составляет следующая теорема о предельном переходе под знаком стохастического интеграла.

Теорема 3.1. Пусть $f_0, f_1, f_2, \ldots \in S$, $0 \leqslant T \leqslant \infty$. Утверждается, что

$$\sup_{t \leqslant T} \left| \int_0^t f_{0s} dW_s - \int_0^t f_{ns} dW_s \right| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0,$$

тогда и только тогда, когда

$$\int_0^T | f_{0s} - f_{ns} |^2 ds \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

С помощью этой теоремы найдем $\int_0^t W_s dW_s$. Имеем

$$2\int_0^t W_s dW_s = \mathbf{P} - \lim_{n \to \infty} 2 \int_0^t \sum_{i=0}^{n-1} W_{t\frac{i}{n}} I\left(t\frac{i}{n} \leqslant s < t\frac{i+1}{n}\right) dW_s =$$

$$= \mathbf{P} - \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} 2W_{t\frac{i}{n}} (W_{t\frac{i+1}{n}} - W_{t\frac{i}{n}}) =$$

$$= \mathbf{P} - \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} [W^2_{t\frac{i+1}{n}} - W^2_{t\frac{i}{n}} - (W_{t\frac{i+1}{n}} - W_{t\frac{i}{n}})^2] = W_t^2 - t \text{ (п. н.)},$$

где последнее равенство верно в силу теоремы 1.5. Поскольку первое и последнее выражение в этой цепочке равенств непрерывны по t (п. н.), то при всех t сразу (п. н.)

$$2\int_0^t W_s dW_s = W_t^2 - t. \tag{3.6}$$

2. Эта формула является частным случаем замечательной *формулы Ито*, к рассмотрению которой мы сейчас и переходим. Займемся сразу многомерным случаем. Скажем, что k — мерный винеровский процесс $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^k)$ является винеровским относительно потока σ-алгебр $\{\mathscr{F}_t\}$ (кратко, что $\{W_t, \mathscr{F}_t\}$ — винеровский процесс), если $\{W_t^i, \mathscr{F}_t\}$ — винеровский процесс при всяком $i=1, \ldots, k$. Будем писать, что векторный процесс $f_t = (f_t^1, \ldots, f_t^k) \in S^k$, если $f^i \in S$ при $i=1, \ldots, k$. При $f \in S^k$ положим

$$\int_0^t f_s dW_s = \sum_{i=1}^k \int_0^t f_s^i dW_s^i.$$

Естественно также, что если задан матричный процесс $\sigma_t = (\sigma_t^{ij},\ i=1, \ldots, d,\ j=1, \ldots, k)$, то мы пишем $\sigma \in S^{dk}$, когда $\sigma^{ij} \in S$ при всех i, j. Кроме того, в этом случае $\int_0^t \sigma_s dW_s$ определяется как d — мерный процесс, для которого

$$\left(\int_0^t \sigma_s dW_s\right)^i = \sum_{j=1}^k \int_0^t \sigma_s^{ij} dW_s^j.$$

Далее удобно ввести понятие стохастического дифференциала. Интересно, что этому понятию разные авторы (Ито, И. И. Гихман и др.) в разное время придавали разное толкование и в том смысле, в котором оно описано ниже, оно появилось значителньо позже стохастического интеграла Ито, когда формула Ито получила широкое признание и возникла необходимость записать ее как можно проще и естественнее. Пусть $\sigma = (\sigma^{ij}) \in S^{dk}$, $b_t = (b_t^1, \ldots, b_t^d)$ $\mathscr{F}_t$ — измерима при всяком t, измерима по (ω, t) и $\int_0^t |b_s| ds < \infty$ (п. н.) для любого t. В том случае, когда для процесса $\xi_t = (\xi_t^1, \ldots, \xi_t^d)$ при всех t сразу (п. н.) имеет место равенство

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

будем говорить, что ξ_t имеет *стохастический дифференциал*, писать

$$d\xi_t = b_t dt + \sigma_t dW_t, \tag{3.7}$$

и правую часть, которая является чисто формальным выражением, будем называть стохастическим дифференциалом процесса ξ_t.

Определим правила действия со стохастическими дифференциалами. Сложение их и умножение на константу определяются естественным образом, при умножении же стохастических дифференциалов договоримся обычным способом раскрывать скобки и пользоваться следующей таблицей умножения:

$$dtdt = dtdW_t^i = dW_t^i dt = 0,\ dW_t^i dW_t^i = dt,\ dW_t^i dW_t^j = 0,$$

при $i \neq j$. Например,

$$\left(b_t^i dt + \sum_{j=1}^{k} \sigma_t^{ij} dW_t^j\right)\left(\tilde{b}_t^i dt + \sum_{j=1}^{k} \tilde{\sigma}_t^{ij} dW_t^j\right) = \sum_{j=1}^{k} \sigma_i^{ij} \tilde{\sigma}_i^{ij} dt.$$

Теорема 3.2 (Формула Ито). Пусть d — мерный процесс ξ_t имеет стохастический дифференциал, $u(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на E_d. Тогда процесс $u(\xi_t)$ имеет стохастический дифференциал и

$$du(\xi_t) = \sum_{i=1}^{d} u_{x^i}(\xi_t)\, d\xi_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} u_{x^i x^j}(\xi_t)\, d\xi_t^i d\xi_i^j. \tag{3.8}$$

Проще всего теорему 3.2 вывести из следующей теоремы.

Теорема 3.3. Пусть одномерные процессы ξ_t, η_t имеют стохастические дифференциалы (с k-мерным винеровским процессом W). Тогда процесс $\xi_t\eta_t$ имеет стохастический дифференциал и

$$d(\xi_t\eta_t) = \xi_t d\eta_t + \eta_t d\xi_t + d\xi_t d\eta_t. \tag{3.9}$$

С помощью теоремы 3.3 немедленно получается, что если формула (3.8) справедлива для $u(x)$, $v(x)$, то она справедлива для $u(x)v(x)$. Кроме того, формула (3.8) очевидным образом справедлива для линейных функций. Следовательно, она имеет место для всех полиномов от $x = (x^1, \ldots, x^d)$. Завершается доказательство теоремы 3.3 с помощью предельного перехода от полиномов к гладким функциям и использования теоремы 3.1.

В свою очередь, доказательство (3.9) из-за линейности обеих частей (3.9) отдельно по ξ и по η сводится к случаям, когда $d\xi_t = b_t dt$ или $d\xi_t = f_t dW_t$, $d\eta_t = b_t dt$ или $d\eta_t = f_t dW_t$, причем b_t, b_t, f_t, f_t — простые функции. Представляя себе простую функцию, как сумму простых с «одной ступенькой» все дело очень быстро сводится к тому, чтобы доказать равенства $dt^2 = 2tdt$, $d(tW_t^j) - (tdW_t^j + W_j^t dt) = 0$,

$$d(W_t^i)^2 = 2W_t^i dW_t^i + dt,\ d(W_t^i W_t^j) = W_t^i dW_t^j + W_t^j dW_t^i \text{ при } i \neq j.$$

Здесь первое равенство известно, второе можно доказать, например, интегрируя по t, возводя в квадрат и вычисляя математическое ожидание, третье равенство — другая запись (3.6), четвертое равенство легко доказать примерно так же, как третье.

В том случае, когда в качестве ξ_t берется сумма неслучайного $x \in E_d$ и d — мерного винеровского процесса W_t, формула Ито приобретает следующий особенно простой вид

$$du(x+W_t) = \frac{1}{2}\Delta u(x+W_t)\,dt + u_x(x+W_t)\,dW_t,$$

т. е.

$$u(x+W_t) = u(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta u(x+W_s)\,ds + \int_0^t u_x(x+W_s)\,dW_s. \qquad (3.10)$$

3. Формула Ито вместе со следующим свойством стохастического интеграла Ито служит основой многочисленных вычислений. Перед формулировкой этого свойства неотрицательную случайную величину τ, принимающую значения из $[0, \infty]$, назовем *марковским моментом* относительно $\{\mathscr{F}_t\}$, если $\{t<\tau\} \in \mathscr{F}_t$ при любом $t \geqslant 0$.

Теорема 3.4 (*тождества Вальда*). Пусть $f \in S^k$, τ — марковский момент,

$$\mathbf{E}\int_0^\tau |f_t|^2 dt < \infty.$$

Тогда

$$\mathbf{E}\int_0^\tau f_t\,dW_t = 0, \quad \mathbf{E}\left|\int_0^\tau f_t\,dW_t\right|^2 = \mathbf{E}\int_0^\tau |f_t|^2 dt.$$

Подставляя в (3.10) вместо t величину $\tau(x)$, из формулы (2.9) с помощью теоремы 3.4 легко еще раз получить формулу (2.9). Легко получить и гораздо больше. Например, пусть u — решение в $\mathscr{D}$ уравнения

$$\frac{1}{2}\Delta u + cu + f = 0, \qquad (3.11)$$

причем функции u, c, f достаточно регулярны, $u=g$ на $\partial\mathscr{D}$. Тогда при $x \in \mathscr{D}$, $t \leqslant \tau(x)$

$$d\left(e^{\int_0^t c(x+W_s)ds} u(x+W_t)\right) = u(x+W_t)\,de^{\int_0^t c(x+W_s)ds} +$$
$$+ e^{\int_0^t c(x+W_s)ds} du(x+W_t) + \left(de^{\int_0^t c(x+W_s)ds}\right) du(x+W_t) =$$
$$= -f(x+W_t)\,e^{\int_0^t c(x+W_s)ds} dt + e^{\int_0^t c(x+W_s)ds} u_x(x+W_t)\,dW_t.$$

Отсюда аналогично предыдущим рассуждениям о (2.9)

$$u(x)=\mathbf{E}\int\limits_0^{\tau(x)} e^{\int\limits_0^t c(x+W_s)\,ds} f(x+W_t)\,dt+$$

$$+\mathbf{E}e^{\int\limits_0^{\tau(x)} c(x+W_s)\,ds} g(x+W_{\tau(x)}). \tag{3.12}$$

Если $f\equiv 0$, $g\equiv 1$, то полученная формула называется формулой Каца. Ее можно использовать, например, для нахождения распределения τ. Так, при $d=1$, $\mathscr{D}=(-1, 1)$, $c(x)=-\lambda$, где постоянная $\lambda>0$, $f=0$, $g=1$, имеем $u(x)=(\mathrm{ch}\sqrt{2\lambda}x)(\mathrm{ch}\sqrt{2\lambda})^{-1}$, и (3.12) дает преобразование Лапласа распределения $\tau(x)$:

$$\mathbf{E}e^{-\lambda\tau(x)}=\left(\mathrm{ch}\sqrt{2\lambda}x\right)\left(\mathrm{ch}\sqrt{2\lambda}\right)^{-1}.$$

4. Формуле Ито (3.8) удобно придать более явный вид. Пусть $d\xi_t=\sigma_t dW_t+b_t dt$, тогда, проведя необходимые вычисления, находим

$$du(\xi_t)=L_t u(\xi_t)\,dt+\sigma_t^* u_x(\xi_t)\,dW_t,$$

где

$$L_t u(y)=\sum_{i,j\leqslant d} a_t^{ij} u_{x^i x^j}(y)+\sum_{i\leqslant d} b_t^i u_{x^i}(y), \quad (a_t^{ij})=\frac{1}{2}\sigma_t\sigma_t^*.$$

Если $\xi_0=x_0\in\mathscr{D}$, x_0 неслучайно, $\sigma_t=\sigma(\xi_t)$, $b_t=b(\xi_t)$ для некоторых борелевских функций $\sigma(y)$, $b(y)$, и, стало быть, ξ_t — решение стохастического уравнения Ито

$$d\xi_t=\sigma(\xi_t)\,dW_t+b(\xi_t)\,dt, \tag{3.13}$$

то $a_t^{ij}=a^{ij}(\xi_t)$, где $(a^{ij}(y))=\frac{1}{2}\sigma(y)\sigma^*(y)$, и аналогично (3.12) для решения дифференциального уравнения

$$\sum_{i,j\leqslant d} a^{ij}u_{x^i x^j}+\sum_{i\leqslant d} b^i u_{x^i}+cu+f=0 \text{ в } \mathscr{D} \tag{3.14}$$

с граничным данным $u=g$ на $\partial\mathscr{D}$ получаем представление

$$u(x_0)=\mathbf{E}\int\limits_0^{\tau} f(\xi_t)e^{\int\limits_0^t c(\xi_s)\,ds}\,dt+\mathbf{E}e^{\int\limits_0^{\tau} c(\xi_s)\,ds} g(\xi_\tau), \tag{3.15}$$

где τ — момент первого выхода ξ_t из $\mathscr{D}$. Разумеется, формула (3.15) верна только при некоторых условиях, однако формулировать какую-либо общую теорему на этот счет бесполезно, так как она все равно не охватит всех возможных случаев, а вывод (3.15), намеченный выше, в каждом конкретном случае можно сделать вполне строго.

Формула (3.15), которую также иногда называют формулой Ито, играет исключительно важную роль в осуществлении связей между теорией диффузионных процессов и теорией дифференциальных уравнений в частных производных. Заметим, кстати, что уравнение (3.14) является эллиптическим (вообще говоря, вырождающимся и, стало быть, может оказаться и параболическим), так как

$$\sum_{i,j} a^{ij}\lambda^i\lambda^j = \frac{1}{2}\,|\sigma^*\lambda|^2 \geqslant 0.$$

Нельзя даже кратко упомянуть всех приложений вероятностного представления (3.15) решения уравнения (3.14). Покажем только, как из него мгновенно вытекает существование ограниченного на $(-\infty, \infty)$ не равного нулю решения уравнения

$$u'' + x^3 u' - u = 0, \tag{3.16}$$

про которое в одной из работ ошибочно утверждается, что оно имеет только нулевые ограниченные решения.

Рассмотрим уравнение

$$\xi_t = x + W_t + \int_0^t \xi_s^3\, ds, \tag{3.17}$$

где x — фиксировано, W_t — одномерный винеровский процесс. Обозначая $\eta_t = \xi_t - W_t$, видим, что уравнение (3.17) эквивалентно обыкновенному уравнению $\dot\eta_t = (\eta_t + W_t)^3$, откуда видно, что уравнение (3.17) имеет решение $\xi_t = \xi_t(x)$, но только на конечном (случайном) интервале времени $[0, \tau(x))$ и, более того, $|\xi_t(x)| \to \infty$ при $t \uparrow \tau(x)$. Положим

$$v(x) = \mathbf{E}e^{-\tau(x)}.$$

Поскольку $\tau(x) < \infty$ (п. н.) (достаточно, чтобы $\mathbf{P}\{\tau(x) < \infty\} > 0$), то $v(x) > 0$. Далее, пусть $\tau_n(x)$ — момент первого выхода $\xi_t(x)$ из $(-n, n)$. Тогда, очевидно,

$$\tau(x) = \tau_n(x) + \tau(\xi_{\tau_n(x)}(x)),$$

что вместе со строго марковским свойством винеровского процесса дает

$$v(x) = \mathbf{E}e^{-\tau_n(x)} v\left(\xi_{\tau_n(x)}(x)\right).$$

Отсюда вытекает, что v — решение уравнения (3.16). В самом деле, уравнение (3.16) имеет решение на $(-n, n)$, равное v в точках $\pm n$. По формуле (3.15) это решение совпадает с v на $(-n, n)$. Таким образом, v — положительное ограниченное решение (3.16).

Можно пойти чуть дальше в исследовании уравнения (3.16). Аналогично показывается, что

$$v_1(x) = \mathbf{E}e^{-\tau(x)} I\left(\lim_{t \uparrow \tau(x)} \xi_t(x) = \infty\right)$$

является вторым ограниченным решением (3.16). Решения v, v_1 линейно независимы ($v(x) \not\to 0$, $v_1(x) \to 0$ при $x \to -\infty$), а поэтому и любое решение уравнения (3.16) ограничено.

§ 4. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. Теоремы Гирсанова

1. Понятие стохастического дифференциального уравнения впервые появилось, по-видимому, в работах С. Н. Бернштейна [2], [3], [22] примерно пятьдесят лет тому назад. С. Н. Бернштейн понимал под стохастическим дифференциальным уравнением последовательность стохастических разностных по t уравнений и при некоторых предположениях доказывал сходимость одномерных распределений их решений к пределу при неограниченном уменьшении шага по t. При этом в стороне оставался вопрос о *существовании предельного процесса*, который естественно было бы назвать решением стохастического дифференциального уравнения. В работах И. И. Гихмана [9], [10], относящихся к 1950—1951 гг., проводится более последовательная точка зрения. В них уже есть решение стохастического дифференциального уравнения и само это уравнение понимается почти в современном смысле. При этом И. И. Гихман интересовался не только фактом разрешимости стохастических уравнений, но и тем, каким образом можно аналитически описать некоторые свойства их решений. В частности, он первым доказал разрешимость линейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка, причем сделал это чисто вероятностным способом.

Примерно в это же время Ито [23], [24] предложил несколько иную трактовку понятия стохастического дифференциального уравнения и доказал разрешимость этих уравнений с помощью введенного им понятия стохастического интеграла. Подход Ито заслонил работы И. И. Гихмана, которые были «открыты» вновь только в начале 60-х годов, и явился мощным стимулом развития теории процессов марковского типа благодаря удобному, естественному и хорошо разработанному аппарату обращения со стохастическими интегралами. Этот аппарат прежде всего сделал возможным построение и изучение процессов сложной природы с помощью более простых процессов, таких как винеровский и пуассоновский. К настоящему времени имеется огромная литература, посвященная стохастическим уравнениям Ито. Часть этой литературы может быть найдена в ссылках в книгах И. И. Гихмана, А. В. Скорохода [11], Ватанабэ, Икэда [4].

2. Стохастические уравнения Ито имеют вид (3.13), где σ, b могут зависеть от t и от ω. Для приложений бывает важно, имея тот или иной процесс, «угадать», какому стохастическому дифференциальному уравнению он удовлетворяет. На эту тему имеется много общих результатов, в основном связанных с понятиями марковского процесса, семимартингала и с их каноническими представлениями (см. ниже гл. 3). Приведем здесь только одно правило, которое хорошо работает во многих случаях и которое весьма близко к идеям А. Н. Колмогорова [14], И. И. Гихмана [9], [10], Ито [25].

Пусть ξ_t — непрерывный по t случайный d-мерный процесс. Обозначим $\mathscr{F}_t^\xi=\sigma\{\xi_s,\ s\leqslant t\}$, и предположим, что (в подходящем смысле) при всяком $t\geqslant 0$ существуют пределы

$$\lim_{h\downarrow 0}\mathbf{E}\,\{\xi_{t+h}-\xi_t\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\}=:b_t, \tag{4.1}$$

$$\lim_{h\downarrow 0}\mathbf{E}\,\{(\xi_{t+h}^i-\xi_t^i)(\xi_{t+h}^j-\xi_t^j)\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\}=:a_t^{ij}. \tag{4.2}$$

Вектор b_t называется вектором сноса, матрица $a_t=(a_t^{ij})$ — матрицей диффузии. Очевидно, $a_t\geqslant 0$. Обозначим $\sigma_t=\sqrt{a_t}$. Оказывается, что при широких предположениях или на исходном вероятностном пространстве или на его расширении существует d-мерный винеровский процесс $(W_t,\ \mathscr{F}_t^\xi)$ такой, что $d\xi_t=b_t dt+\sigma_t dW_t$. Если в (4.1), (4.2) мы имеем $b_t=b(\xi_t)$, $a_t=a(\xi_t)$, для некоторых, вообще говоря, случайных функций $b_t(x)$, $a_t(x)$ на $[0,\infty)\times\Omega\times E_d$, то получается, что ξ_t удовлетворяет стохастическому уравнению Ито

$$d\xi_t=b_t(\xi_t)\,dt+\sigma_t(\xi_t)\,dW_t, \tag{4.3}$$

где $\sigma_t(x)=\sqrt{2a_t(x)}$. В том случае, когда $b_t(x)$, $a_t(x)$ не зависят от ω, говорят, что процесс ξ_t является диффузионным.

В качестве примера применения приведенного выше правила рассмотрим так называемый процесс Орнштейна—Уленбека, который часто встречается в физических и других приложениях, поскольку он является простейшим непрерывным стационарным процессом. Одномерный гауссовский процесс ξ_t с нулевым средним называется *процессом Орнштейна—Уленбека*, если $\mathbf{E}\xi_t\xi_s=e^{-|t-s|}$ при $t,\ s\geqslant 0$. Аналогично рассуждениям, следующим за теоремой 1.4, можно показать, что ξ_t имеет непрерывную модификацию, а поэтому мы будем предполагать, что процесс ξ_t непрерывен. Далее, при $t\geqslant s$, $h\geqslant 0$

$$\mathbf{E}\,(\xi_{t+h}-e^{-h}\xi_t)\,\xi_s=e^{-(t+h-s)}-e^{-h}e^{-(t-s)},$$

откуда по теореме о нормальной корреляции вытекает, что $\xi_{t+h}-e^{-h}\xi_t$ не зависит от траектории ξ_s при $s\leqslant t$, т. е. не зависит от $\mathscr{F}_t^\xi$,

$$\mathbf{E}\,\{\xi_{t+h}-e^{-h}\xi_t\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\}=\mathbf{E}\,(\xi_{t+h}-e^{-h}\xi_t)=0,$$

$$\mathbf{E}\,\{(\xi_{t+h}-e^{-h}\xi_t)^2\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\}=\mathbf{E}\,(\xi_{t+h}-e^{-h}\xi_t)^2=1-e^{-2h},$$

$$\mathbf{E}\,\{(\xi_{t+h}-\xi_t)^2\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\}=\mathbf{E}\,\{(\xi_{t+h}-e^{-h}\xi_t+(e^{-h}-1)\,\xi_t)^2\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\}=$$
$$=1-e^{-2h}+(e^{-h}-1)^2.$$

Следовательно, в этом случае $a_t=2$, $b_t=-\xi_t$ и (4.3) дает так называемое *уравнение Ланжевена*

$$\xi_t=\xi_0+\sqrt{2}W_t-\int_0^t \xi_s ds, \quad t\geqslant 0.$$

Еще один важный пример дает так называемый броуновский мост или условный винеровский процесс, играющий важную роль в статистике (даже одномерных случайных величин). Броуновский мост — это одномерный винеровский процесс W_t, рассматриваемый при условии, что $W_1=0$. Поскольку $\mathbf{P}\{W_1=0\}=0$, то это определение следует уточнить. На самом деле говорят, что одномерный непрерывный процесс ξ_t, $t\in[0, 1]$, является *броуновским мостом*, если для любых $0\leqslant t_1\leqslant\ldots\leqslant t_n<1$ распределение $(\xi_{t1},\ldots,\xi_{tn})$ имеет плотность, совпадающую с условной плотностью $(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})$ при условии, что $W_1=0$. Так как последняя является гауссовской, то ξ_t — гауссовский процесс. Далее, аналогично предыдущим вычислениям, находим, что процесс W_t-tW_1, $t\in[0, 1]$, не зависит от W_1. Отсюда при $0\leqslant s\leqslant t\leqslant t+h<1$

$$\mathbf{E}\xi_t\xi_s=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\mathbf{P}\{|W_1|\leqslant\varepsilon\}}\mathbf{E}W_tW_sI\{|W_1|\leqslant\varepsilon\}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\mathbf{P}\{|W_1|\leqslant\varepsilon\}}\mathbf{E}(W_t-tW_1)(W_s-sW_1)I\{|W_1|\leqslant\varepsilon\}=$$

$$=\mathbf{E}(W_t-tW_1)(W_s-sW_1)=s-ts,$$

$$\mathbf{E}\left(\xi_{t+h}-\frac{1-t-h}{1-t}\xi_t\right)\xi_s=0,$$

$$\mathbf{E}(\xi_{t+h}-\xi_t\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)=-\xi_t\frac{h}{1-t},$$

$$b_t=-\frac{1}{1-t}\xi_t, \quad a_t=1.$$

Стало быть, мы приходим к следующему соотношению:

$$\xi_t=\widetilde{W}_t-\int_0^t\frac{1}{1-s}\xi_s ds$$

с некоторым винеровским процессом $\widetilde{W}_t$.

3. До сих пор мы приводили примеры стохастических уравнений Ито с постоянным коэффициентом σ. Их разрешимость часто удается доказать, опираясь на теорию обыкновенных уравнений так, как это сделано для уравнения (3.17) с помощью введения нового процесса $\eta_t=\xi_t-\sigma W_t$. При этом нужно, чтобы для соответствующего обыкновенного уравнения теорема существования решения была известна. Нетрудно привести примеры, показывающие, что уравнение $\dot{x}_t=b(t, x_t)$ может не иметь решений, если $b(t, x)$ только измерима. Тем более удивительна такая

Теорема 4.1. (А. К. Звонкин [12], $d=1$; А. Ю. Веретенников [6], $d\geqslant 1$). Пусть $(W_t, \mathscr{F}_t)$ — d-мерный винеровский процесс, σ — действительная постоянная, $\sigma\neq 0$, $b(t, x)$ — ограниченная борелевская функция от $(t, x)\in[0, \infty)\times E_d$ со значениями в E_d. Тогда существует $\mathscr{F}_t$ — измеримый при каждом $t\geqslant 0$ d-мерный непрерывный процесс ξ_t такой, что при всех t сразу с вероятностью 1

$$\xi_t=\sigma W_t+\int_0^t b(s, \xi_s)\,ds \tag{4.4}$$

Кроме того, если процесс η_t $\mathscr{F}_t$ — измерим при каждом $t\geqslant 0$ и также удовлетворяет уравнению (4.4) при всех t сразу (п. н.), то $\xi_t=\eta_t$ $\forall t\geqslant 0$ (п. н.).

В частности, из теоремы 4.1 следует, что для почти всякой винеровской траектории W_t обыкновенное уравнение

$$\eta_t=\int_0^t b(s, \eta_s-\sigma W_s)\,ds \tag{4.5}$$

имеет решение. Единственность же его с точки зрения теории обыкновенных уравнений несколько экстравагантна; не утверждается, что для почти всякой индивидуальной винеровской траектории решение (4.5) единственно, а только, что два $\mathscr{F}_t$-согласованных решения (4.5), определенных для почти всех траекторий W_t, совпадают почти наверное. В то же время уравнения (4.4), (4.5), возможно, имеют решения, зависящие от будущего. Вопрос о единственности решения уравнения (4.5) или (4.4) для почти всякой траектории W_t остается в настоящее время открытым.

Простейшим стохастическим уравнением с диффузией σ, зависящей от «случая», является линейное стохастическое уравнение без сноса

$$\xi_t=1+\int_0^t \xi_s\sigma_s\,dW_s. \tag{4.6}$$

С помощью формулы Ито элементарно проверяется, что его решением является так называемая *мартингальная экспонента*

$$\xi_t=\exp\left\{\int_0^t \sigma_s\,dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t |\sigma_s|^2\,ds\right\}, \tag{4.7}$$

причем σ_s, W_s могут быть скалярными или d-мерными, лишь бы $\sigma\in S^d$.

С мартингальной экспонентой связана

Теорема 4.2 (И. В. Гирсанов [8]). Пусть $(W_t, \mathscr{F}_t)$ — d-мерный винеровский процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, $\sigma \in S^d$, постоянная $T \in (0, \infty)$. Пусть

$$\mathbf{E} \exp\left\{\int_0^T \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T |\sigma_s|^2 ds\right\} = 1. \tag{4.8}$$

Определим на $\mathscr{F}$ новую (вероятностную) меру по формуле

$$\bar{\mathbf{P}}(d\omega) = \exp\left\{\int_0^T \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T |\sigma_s|^2 ds\right\} \mathbf{P}(d\omega).$$

Утверждается, что тогда процесс

$$\xi_t = W_t - \int_0^t \sigma_s ds$$

является d-мерным винеровским при $t \in [0, T]$ относительно $\{\mathscr{F}_t\}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \bar{\mathbf{P}})$.

Отметим, что условие (4.8) является естественным в силу связи (4.7) с (4.6) и теоремы 3.4 о тождествах Вальда. Доказательство теоремы 4.2 основано на том, что равенство (4.8) оказывается верным и в том случае, когда σ_s заменяется на $\sigma_s + i\lambda_s$, где λ_s — неслучайная простая функция. После такой замены элементарные преобразования показывают, что слева в (4.8) стоит математическое ожидание по мере $\bar{\mathbf{P}}$ от

$$\exp\left\{i\int_0^T \lambda_s d\xi_s + \frac{1}{2}\int_0^T |\lambda_s|^2 ds\right\},$$

откуда сразу получается характеристическая функция набора $\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}$ при любых $t_i \in [0, T]$, $n \geqslant 1$.

Теорема Гирсанова 4.2 имеет огромное количество применений в теории стохастических уравнений Ито и их приложениях, например, к статистике случайных процессов диффузионного типа, к управлению такими процессами и т. д. Полезно в связи с этим указать, что условие (4.8) выполнено, например, если процесс σ_t ограничен на $[0, T] \times \Omega$. Имеется и более тонкий результат.

Теорема 4.3. Для выполнения условия (4.8) достаточно (А. А. Новиков [19]), чтобы

$$\mathbf{E} \exp \frac{1}{2}\int_0^T |\sigma_s|^2 ds < \infty,$$

или (Казамаки [26]), чтобы при любом $t \leqslant T$

$$\mathbf{E} \exp \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s dW_s < \infty.$$

Из теоремы Гирсанова 4.2 удивительно элементарно получается следующий «слабый» вариант теоремы 4.1.

Теорема 4.4. (И. В. Гирсанов [8]). Пусть постоянная $\sigma \neq 0$, $b(t, x)$ — борелевская функция на $[0, T] \times E_d$ со значениями в E_d. Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ и винеровский d-мерный процесс на нем $(W_t, \mathscr{F}_t)$ такие, что уравнение (4.4) на $[0, T]$ имеет непрерывное $\mathscr{F}_t$ — измеримое при всяком $t \in [0, T]$ решение. Кроме того, распределения в $C([0, T]; E_d)$ любых двух решений (4.4) совпадают.

В самом деле, для доказательства существования решения достаточно взять на каком-нибудь вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \overline{\mathbf{P}})$ d-мерный винеровский процесс $(\eta_t, \mathscr{F}_t)$, положить $\xi_t = \sigma \eta_t$,

$$W_t = \sigma^{-1} \left(\xi_t - \int_0^t b(s, \xi_s) ds \right),$$

и заметить, что по теореме 4.2 процесс W_t является винеровским при $t \in [0, T]$ на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ с

$$\mathbf{P}(d\omega) = \exp \left\{ \int_0^T \frac{1}{\sigma} b(s, \xi_s) d\eta_s - \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T |b(s, \xi_s)|^2 ds \right\} \overline{\mathbf{P}}(d\omega).$$

Второе утверждение теоремы 4.3 доказывается обращением этих рассуждений.

Эта теорема, в отличие от теоремы 4.1, не позволяет утверждать существование решения уравнения (4.4) на *данном* вероятностном пространстве с *данным* винеровским процессом. В этом «слабость» теоремы 4.4. Однако у нее есть и большое преимущество перед теоремой 4.1, так как теорема 4.3 вместе с доказательством буквально переносится на случай, когда коэффициент b зависит от всего прошлого процесса ξ_t неупреждающим образом.

Теорему Гирсанова 4.2 можно использовать во многих вычислениях. Найдем, например, распределение $\zeta = \max\{t + W_t, t \leqslant T\}$, где постоянная $T \in (0, \infty)$, W_t — одномерный винеровский процесс.

Полагая $\bar{W}_t = t + W_t$, $\bar{\mathbf{P}}(d\omega) = \exp\left(-W_T - \frac{1}{2}T\right)\mathbf{P}(d\omega)$, находим

$$\mathbf{P}\{\zeta > x\} = \int_\Omega (\zeta > x) e^{W_T + \frac{1}{2}T} e^{-W_T - \frac{1}{2}T}\mathbf{P}(d\omega) =$$

$$= \int_\Omega I(\max_{t \leqslant T} \bar{W}_t > x) e^{\bar{W}_T - \frac{1}{2}T}\bar{\mathbf{P}}(d\omega) = \mathrm{E} e^{W_T - \frac{1}{2}T} I(\max_{t \leqslant T} W_t > x),$$

где последнее равенство верно в силу того, что $\bar{W}_t$ — винеровский процесс при $t \leqslant T$ относительно меры $\bar{\mathbf{P}}$. Далее, аналогично (1.5) показывается, что при $x > 0$

$$\mathbf{P}(\max_{t \leqslant T} W_t > x,\ W_T > y) = \mathbf{P}(W_T > y) \text{ при } y \in [x, \infty),$$

$$\mathbf{P}(\max_{t \leqslant T} W_t > x,\ W_T \leqslant y) = \mathbf{P}(\max_{t \leqslant T} W_t > x,\ W_T \geqslant 2x - y) =$$

$$= \mathbf{P}(W_T \geqslant 2x - y) \text{ при } y \in (-\infty, x].$$

Отсюда при $x > 0$

$$\mathbf{P}\{\zeta > x\} = -\int_x^\infty e^{y - \frac{1}{2}T} d_y \mathbf{P}\{W_T > y\} + \int_{-\infty}^{x} e^{y - \frac{1}{2}T} d_y \mathbf{P}\{W_T \geqslant 2x - y\} =$$

$$= \int_x^\infty e^{y - \frac{1}{2}T} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{y^2}{2T}} dy + \int_{-\infty}^{x} e^{y - \frac{1}{2}T} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(2x-y)^2}{2T}} dy.$$

4. В отличие от изощренных методов доказательства теорем 4.1, 4.4, следующая классическая теорема доказывается обычным методом последовательных приближений.

Теорема 4.5 (Ито [24], [25]). Пусть $(W_t, \mathscr{F}_t)$ — k-мерный винеровский процесс, $\sigma_t(x) = \sigma_t(\omega, x)$, $t \geqslant 0$, $\omega \in \Omega$, $x \in E_d$ — матричная функция размера $d \times k$, $b_t(x) = b_t(\omega, x)$ — функция со значениями в E_d. Предположим, что $\sigma_t(x)$, $b_t(x)$ измеримы по (t, ω, x), $\mathscr{F}_t$ — измеримы по ω при всяких t, x, и для некоторой постоянной K при всех t, ω, x, y, i, j

$$|\sigma_t^{ij}(x) - \sigma_t^{ij}(y)| + |b_t^i(x) - b_t^i \quad\quad \leqslant K|x - y|,$$

$$|\sigma_t^{ij}(x)| + |b_t^i(x)| \leqslant K(1 + |x|).$$

Тогда для всякого $\mathscr{F}_0$ — измеримого случайного вектора $\xi_0 \in E_d$ существует непрерывный процесс ξ_t, $\mathscr{F}_t$ — измеримый при всяком t, такой, что при всех $t \geqslant 0$ сразу (п. н.)

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t \sigma_s(\xi_s) dW_s + \int_0^t b_s(\xi_s) d_s. \tag{4.9}$$

Кроме того, этот процесс единственен в том же смысле, что и в теореме 4.1.

Отметим еще раз, что Ито [25] рассматривал также уравнения вида (4.9), в правой части которых присутствовали интегралы по пуассоновским и по центрированным пуассоновским мерам, так что их решениями оказывались локально безгранично делимые процессы довольно общей природы.

§ 5. Стохастические дифференциальные уравнения с граничными условиями

1. До сих пор речь шла о решениях стохастических уравнений во всем пространстве или до момента первого выхода из области. Спрашивается, какие есть возможности продолжить решение стохастического уравнения после момента первого выхода из области, которые бы сохранили непрерывность его траекторий и не выводили его за пределы замыкания этой области? Этот вопрос возникает уже при рассмотрении броуновского движения в стакане. Одна из возможностей заключается в остановке навсегда процесса в момент первого выхода. При этом процесс «прилипает» к границе. Вторая возможность — это когда процесс начинает двигаться по границе, «забывая» про область, из которой он вышел. При этом он «прилипает» к границе более сложным образом. Третья возможность заключается в «отражении» от границы внутрь области. Наконец, можно еще комбинировать эти возможности в каждой точке границы с разными вероятностями. Другого ничего не может быть, как показывает результат А. Д. Вентцеля [5].

Понятно, как первые две возможности реализовать на языке стохастических дифференциальных уравнений. Для изучения эффекта отражения естественнее всего начать с одномерного винеровского процесса W_t, который мы хотим заставить «зеркально» отражаться в точке $x=0$ так, чтобы он все время оставался на полуоси $[0, \infty)$. Разумеется, при этом получится процесс $|W_t|$. Так как нас интересуют стохастические дифференциальные уравнения, то нужно найти $d|W_t|$, т. е. представление $|W_t|$ в виде суммы стохастического и обычного интегралов. Это можно было бы легко сделать по формуле Ито, если бы функция $|x|$ была дважды непрерывно дифференцируема. Возникшая трудность обходится с помощью приближения $|x|$ гладкими функциями и оказывается, что

$$|W_t| = W_t' + \varphi_t, \tag{5.1}$$

где

$$W_t' = \int_0^t \operatorname{sign} W_s dW_s, \quad \varphi_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I(|W_s| < \varepsilon) ds, \tag{5.2}$$

причем последний предел существует по вероятности. Он называется *локальным временем* процесса W в нуле. Из (5.1) видно, что φ_t имеет непрерывную модификацию, а из (5.2) следует, что $\varphi_t \geqslant 0$, φ_t не убывает,

$$\int_0^t I(|W_s|=0)\,d\varphi_s=\varphi_t,$$

т. е. φ_t возрастает только на том множестве t, где $|W_t|=0$. Кроме того, нетрудно убедиться, например, с помощью рассуждений о (4.1), (4.2), что W_t' — винеровский процесс. Отсюда, кстати, следует, что $\mathbf{E}\varphi_t=\mathbf{E}|W_t|$ и $\varphi_t \not\equiv 0$, несмотря на то, что

$$\mathbf{E}\int_0^t I(|W_s|=0)\,ds=\int_0^t \mathbf{P}\{|W_s|=0\}\,ds=0,$$

т. е. лебегова мера $\{s: |W_s|=0\}$ равна нулю (п. н.). Отметим, что локальное время W было введено Леви [16] по второй формуле (5.2) и что легче всего доказать его существование с помощью вывода (5.1) из формулы Ито. Значительную информацию о локальных временах можно найти в Ито, Маккин [13].

Теперь поставим задачу о нахождении уравнения, которому должен удовлетворять одномерный диффузионный процесс с коэффициентом диффузии $a(x)$, «мгновенно» отражающийся в нуле и происходящий на положительной полуоси. Сказанное выше делает естественным задавать его с помощью уравнения

$$\xi_t=\xi_0+\int_0^t \sigma(\xi_s)\,I(\xi_s>0)\,dW_s+\varphi_t, \tag{5.3}$$

где неизвестными являются ξ_t, φ_t; $\sigma=\sqrt{2a}$, W_t — одномерный винеровский процесс, σ отвечает за диффузию, когда процесс ξ_t находится вне нуля, φ_t отвечает за отражение в нуле, этот процесс ищется в классе неубывающих неотрицательных, растущих только на множестве $\{t: \xi_t=0\}$. Накладывается также естественное условие, чтобы φ_t было таким, что $\xi_t \geqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$, $\varphi_0=0$ (и, разумеется, начальное данное $\xi_0 \geqslant 0$). Наконец, требование «мгновенности» отражения выражается в требовании, чтобы процесс ξ_t проводил нулевое время в нуле, т. е. чтобы при любом t

$$\int_0^t I(\xi_s=0)\,ds=0 \quad (\text{п. н.}). \tag{5.4}$$

Таким образом, уравнение (5.3) является уравнением относительно пары процессов ξ_t, φ_t, причем эта пара ищется в довольно сложном классе функций. Оказывается, что если, например, σ непрерывна и $\sigma(0)\neq 0$, то при выполнении остальных условий на ξ_t, φ_t пара соотношений (5.3), (5.4) эквивалентна одному

$$\xi_t=\xi_0+\int_0^t \sigma(\xi_s)\,dW_s+\varphi_t \tag{5.5}$$

Кроме того, оказывается, что уравнение (5.5) в рассматриваемом классе функций ξ_t, φ_t эквивалентно двум соотношениям (формулы Скорохода)

$$\xi_t=\xi_0+\int_0^t \sigma(\xi_s)\,dW_s-\min_{0\leqslant s\leqslant t}\left\{\left(\xi_0+\int_0^s \sigma(\xi_u)\,dW_u\right)\wedge 0\right\}, \tag{5.6}$$

$$\varphi_t=-\min_{0\leqslant s\leqslant t}\left\{\left(\xi_0+\int_0^s \sigma(\xi_u)\,dW_u\right)\wedge 0\right\}. \tag{5.7}$$

Здесь фактически имеется уже только одно уравнение (5.6) относительно ξ_t, а (5.7) дает выражение φ через ξ. Разрешимость уравнения (5.6) можно доказать методом последовательных приближений для липшицевых σ, аналогично доказательству теоремы 4.5.

2. В одномерном случае имеется только одно направление отражения. Уже в двумерном случае можно построить процессы, *отражающиеся под разными углами на границе.* Например, решим (одномерное) уравнение (5.3) в классе функций, удовлетворяющих всем перечисленным после него условиям, включая и (5.4), возьмем независимый от W_t одномерный винеровский процесс $\widetilde{W}_t$ и рассмотрим пару (ξ_t, η_t), где $\eta_t=\widetilde{W}_t+a\varphi_t$, $a=\mathrm{const}$. Оказывается, естественно считать, что процесс (ξ_t, η_t) является двумерным процессом в $E_2^+=\{(x^1, x^2) : x^1\geqslant 0\}$, мгновенно отражающимся от оси $x^1=0$ под углом $\alpha=\operatorname{arctg} a$. В самом деле, при $\xi_0=0$ имеем $\mathbf{E}\xi_t=\mathbf{E}\varphi_t$, $\mathbf{E}\eta_t=a\mathbf{E}\varphi_t$, $\mathbf{E}\eta_t/\mathbf{E}\xi_t=a$.

Общее стохастическое уравнение для диффузионного процесса в d-мерной области $\mathscr{D}$ с отражением по направлению $l(x)$, заданному на $\partial\mathscr{D}$ и направленному внутрь $\mathscr{D}$, выглядит следующим образом:

$$d\xi_t=\sigma(\xi_t)I(\xi_t\in\mathscr{D})\,dW_t+b(\xi_t)I(\xi_t\in\mathscr{D})\,dt+$$
$$+l(\xi_t)\,d\varphi_t, \tag{5.8}$$

причем ищется пара ξ_t, φ_t такая, что $\xi_t\in\overline{\mathscr{D}}$, φ_t не убывает $\varphi_0=0$,

$$\varphi_t=\int_0^t I(\xi_s\in\partial\mathscr{D})\,d\varphi_s,\quad \int_0^t I(\xi_s\in\partial\mathscr{D})\,ds=\int_0^t \rho(\xi_s)\,d\varphi_s,$$

где σ, b, W — матрица, вектор и винеровский процесс соответствующих размерностей, $\rho(x)$ — заданная неотрицательная функция. Функция $\rho(x)$ характеризует время, которое процесс ξ_t проводит на $\partial\mathscr{D}$, если $\rho\equiv 0$, то получается «мгновенное» отражение и говорят, что граница $\partial\mathscr{D}$ является «упругой», если же $\rho>0$, то говорят об «эластичном» отражении, когда процесс ξ_t некоторое (реальное) время проводит и на $\partial\mathcal{D}$. Здесь уже имеется комбинация «прилипания» к границе с «мгновенным» отражением. Кстати, при $l=0$ получается остановка процесса ξ_t на границе. Более сложное поведение ξ_t на границе, включающее диффузию по $\partial\mathcal{D}$, можно описать, если в правую часть (5.8) дописать слагаемые, содержащие некоторые мартингалы (см. Ватанабэ, Икэда [4]).

Относительно уравнения (5.8), свойств его решений и других подходов к определению диффузионных процессов с граничными условиями, в том числе и проходящих сквозь границу, мы отсылаем читателя к работам И. И. Гихмана, А. В. Скорохода [11], М. И. Фрейдлина [21], Ватанабэ, Икэды [4], Н. В. Крылова [15], И. Л. Гениса, Н. В. Крылова [7], С. В. Ануловой [1], Лионса, Шнитмана [27], Танаки [29], М. Б. Малютова [17], Н. И. Портенко [20].

3. Как и «обычные» уравнения Ито, уравнения с граничными условиями связаны с теорией дифференциальных уравнений в частных производных. Установить эту связь можно, например, с помощью формулы Ито (теорема 3.2), в которой необходимо рассматривать стохастические дифференциалы уже более общего вида, чем (3.7). Например, для случая процессов типа (5.8) формула Ито имеет тот же вид, что и в теореме 3.2, со следующим дополнением в таблицу умножения дифференциалов

$$(d\varphi_t)^2=dt\,d\varphi_t=dW_t^i d\varphi_t=0.$$

Аналогично (3.15) при некоторых условиях доказывается, что если u — решение уравнения (3.14) с граничным условием $(u_x, l)=g$ на $\partial\mathcal{D}$, ξ_t — решение уравнения (5.8) с начальным данным $\xi_t=x$, то

$$u(x)=\mathbf{E}\left[\int_0^\infty f_0(\xi_t)e^{\int_0^t c_0(\xi_s)ds}dt+\int_0^\infty g(\xi_t)e^{\int_0^t c_0(\xi_s)ds}d\varphi_s\right], \qquad (5.9)$$

где $(f_0, c_0)=(f, c)I(x\in\mathcal{D})$. Формула (5.9), как и (3.15), важна как для теории вероятностей, так и для теории дифференциальных уравнений. Например, с ее помощью в работе М. Б. Малютова [17] выяснен совершенно прозрачный вероятностный смысл несколько загадочных с аналитической точки зрения условий разрешимости задачи Пуанкаре о наклонной производной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анулова С. В.* О процессах с производящим оператором Леви в полупространстве // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1978.— *41*, № 4.— С. 708—750.
2. *Бернштейн С. Н.* Принципы теории стохастических дифференциальных уравнений // Тр. физ.-мат. ин-т им. Стеклова:— 1934.— *5*.— С. 95—124.

3. — Теория вероятностей. 4-ое изд.— М.— Л.: ОГИЗ, Гос. изд. технико-теоретич. лит., 1946.— 556 с.
4. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.— М.: Наука, 1986.— 445 с.
5. *Вентцель А. Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятностей и ее применения.— 1959.— *4*, № 2.— С. 172—185.
6. *Веретенников А. Ю.* О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений // Мат. сб.— 1980.— *111* (*153*), № 3.— С. 434—452.
7. *Генис И. Л., Крылов Н. В.* О точных барьерах в задаче о косой производной // Сиб. мат. ж.— 1973.— *14*, № 1.— С. 36—43.
8. *Гирсанов И. В.* О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры // Теория вероятностей и ее применения.— 1960.— *5*, № 3.— С. 314—330.
9. *Гихман И. И.* К теории дифференциальных уравнений случайных процессов. Ч. I // Укр. мат. ж.— 1950.— *2*, № 4.— С. 37—63.
10. — К теории дифференциальных уравнений случайных процессов. Ч. II // Укр. мат. ж.— 1951.— *3*, № 3.— С. 317—339.
11. —, *Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев: Наукова Думка, 1982.— 611 с.
12. *Звонкин А. К.* Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, уничтожающее снос // Мат. сб.— 1974.— *93 (135)*, № 1.— С. 129—149.
13. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории.— М.: Изд-во И. Л., 1968.— 395 с.
14. *Колмогоров А. Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи мат. наук.— 1938.— *5*.— С. 5—41 (перевод с немецкого яз. статьи 1931 г.)
15. *Крылов Н. В.* Диффузия на плоскости с отражением. Краевая задача // Сиб. мат. ж.— 1969.— *10*, № 2.— С. 355—372.
16. *Леви П.* Стохастические процессы и броуновское движение.— М.: Наука, 1972.— 375 с. (перевод второго французского издания, 1965 г.)
17. *Малютов М. Б.* О краевой задаче Пуанкаре // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1969.— *20*.— С. 173—204.
18. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1969.— 480 с.
19. *Новиков А. А.* Об одном тождестве для стохастических интегралов // Теория вероятн. и ее применения.— 1972.— *17*, № 4.— С. 761—765.
20. *Портенко Н. И.* Обобщенные диффузионные процессы.— Киев: Наукова Думка, 1982.— 208 с.
21. *Фрейдлин М. И.* Диффузионные процессы с отражением и задача с косой производной на многообразии с краем // Теория вероятностей и ее применения.— 1963.— *8*, № 1.— С. 80—88.
22. *Bernstein S. N.* Équations differentielles stochastiques // Actual. Sci. Ind.— 1938.— *738*.— С. 5—31.
23. *Ito K.* Stochastic integral // Proc. Imperial Acad. Tokyo.— 1944.— С. 519—524.
24. — On a stochastic integral equation // Proc. Japan Acad.— 1946.— *22*.— С. 32—35.
25. — On stochastic differential equations // Mem. Amer. Math. Soc.— 1951.— *4*.— С. 1—89.
26. *Kazamaki N.* The equivalence of two conditions on weighted norm inequalities for martingales // Proc. Int. Symp. Stochast. Different. Equat. Kyoto.— 1976.— Tokyo: Kinokuniya.— 1978.— С. 141—152.
27. *Lions P. L., Sznitman A. S.* Stochastic differential equations with reflected boundary conditions // Commun. Pure and Appl. Math.— 1984.— *37*.— С. 511—537.

28. *Liptser R. Sh., Shiryaev A. N.* Statistics of random processes,— Springer, 1977.— *1,* 395 с; 1978.— *2.*— 339 с.
29. *Tanaka H.* Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions in convex region // Hiroshima Math. J.— 1979.— *9,* № 1.— С. 163—178.

Глава 2

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

I. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (СДУ)

§ 1. Сильные решения стохастических дифференциальных уравнений

1. Решение СДУ по винеровскому процессу называется сильным (ср. гл. 1, § 4), если оно согласовано с винеровским потоком σ-алгебр. Другими словами, сильное решение — это такое решение, траектория которого до всякого момента t может быть представлена как измеримое отображение траектории винеровского процесса также до момента t. Помимо самостоятельного значения в теории СДУ, сильные решения играют большую роль в теории управления диффузионными процессами и в теории фильтрации. Теорию сильных решений к настоящему моменту, по-видимому, можно считать, в основном, построенной. Тем не менее, ряд важнейших вопросов в ней не разрешены. Один из основных нерешенных вопросов состоит в отыскании естественных условий достаточных для существования сильных решений СДУ, возникающих в теории фильтрации (проблема обновления). Марковский случай (см. ниже) изучен достаточно полно. Мы не касаемся здесь уравнений в бесконечномерных пространствах (этому, в частности, посвящен раздел II данной главы) и уравнений со скачками, уравнений по семимартингалам, и тем более по семимартингалам с многомерным временем. Далее излагаются теоремы о сильных решениях для СДУ с последействием и случайными коэффициентами, марковская теория для невырожденной диффузии и диффузии с вырождением, контрпримеры Цирельсона и Барлоу.

2. Уравнения с последействием. Пусть Ω, $\mathscr{F}$, $\mathbf{P}$) — полное вероятностное пространство, $(W_t, \mathscr{F}_t)$ — d-мерный винеровский процесс на нем, $b(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ — измеримые отображения, $b: R_+ \times C[0, \infty; E^d] \to E^d$, $\sigma: R_+ \times C[0, \infty; E^d] \to E^d \times E^d$ (пространство матриц размера $d \times d$). Функции $b(t, \cdot)$ и $\sigma(t, \cdot)$ предполагаются неупреждающими, т. е. $\mathscr{B}[0, t; E^d]$-измеримыми при каждом $t \geqslant 0$, где $\mathscr{B}[0, t; E^d]$ — борелевская σ-алгебра в $C[0, t;$

E^d] (совпадающая с σ-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами в $C[0,\ t;\ E^d]$). Рассматривается стохастическое диффеденциальное уравнение (СДУ)

$$dx_t=\sigma(t,x)\,dW_t+b(t,x)\,dt,\ t\geqslant 0, \tag{1.1}$$

с $\mathscr{F}_0$ — измеримым начальным условием

$$x_0=\eta. \tag{1.2}$$

Решение x_t называется *сильным* (strong), если при всяком t случайная величина x_t является $\mathscr{F}_t^{W,\eta}$-измеримой. Иногда также сильным решением называют $\mathscr{F}_t$ — согласованное решение на заданном вероятностном пространстве; в этой ситуации употребляют еще термин «строгое решение» (strict solution), — мы используем его в теореме 1. В настоящем параграфе под сильным решением всегда понимается $\mathscr{F}_t^{W,\eta}$ -согласованное, а если начальное условие $\eta=x$ неслучайно, то $\mathscr{F}_t^{W}$ — согласованное. Решение называется *сильно единственным* или *единственным по траекториям*, если любые два решения на любом (одном и том же) вероятностном пространстве и с любым (одним и тем же) винеровским процессом совпадают. Напомним также, что решение называется *слабо единственным* или *единственным по распределению*, если закон распределения один и тот же для всех решений (в том числе на разных вероятностных пространствах). Напомним, что понятие решения, во всяком случае, предполагает, что для него определены соответствующие интегралы Ито и Лебега, входящие в (1.1), для чего достаточно, чтобы

$$\mathbf{P}\left(\int_0^T|b(t,\ x)|\,dt+\int_0^T\|\sigma(t,\ x)\|^2\,dt<\infty,\ \forall T>0\right)=1.$$

Теорема 1.1 (Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев [26, гл. 4]). Пусть неупреждающие функции $\sigma(t,\ x)$, $b(t,\ x)$ удовлетворяют условию Липшица

$$|b(t,\ x)-b(t,\ x')|^2+\|\sigma(t,\ x)-\sigma(t,\ x')\|^2\leqslant$$

$$\leqslant L_1\int_0^t|x_s-x_s'|^2\,dK_s+L_2|x_t-x_t'|^2,\ t\geqslant 0,$$

и условию линейного роста

$$|b(t,\ x)|^2+\|\sigma(t,\ x)\|^2\leqslant L_1\int_0^t(1+|x_s|^2)\,dK_s+$$

$$+L_2(1+|x_t|^2),\ t\geqslant 0,$$

где $L_1,\ L_2\geqslant 0$, $K_s(s\geqslant 0)$ — неубывающая непрерывная справа функция, $x,\ x'\in C[0,\ \infty;\ E^d]$. Пусть η—$\mathscr{F}_0$ — измеримая случайная величина, $\mathbf{P}(|\eta|<\infty)=1$. Тогда уравнение (3.1)—(3.2) имеет строгое решение и решение сильно единственно.

Доказательство этой и других подобных теорем с условиями типа Липшица обычно основано на методе последовательного приближения и неравенстве Гронуолла—Беллмана. (см., например, Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев [26]). Такой же метод позволяет изучать и более общие уравнения по семимартингалам.

Во многих линейных задачах бывает полезен явный вид решения СДУ.

Теорема 1.2 (Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев [26, гл. 4]). Пусть $\sigma(t, x)\equiv\sigma(t)$, $b(t, x)=b_0(t)+b_1(t)x_t$, где $\sigma(t)$, $b_0(t)$, $b_1(t)$ — измеримые неслучайные функции, $\sigma(t)$ и $b_1(t)$ — матрицы размера $d\times d$, $b_0(t)$ — d-мерный вектор,

$$\int_0^T (|b_0(t)|+\|b_1(t)\|+\|\sigma(t)\|^2)\,dt<\infty,\quad \forall T>0.$$

Тогда уравнение (1.1)—(1.2) имеет единственное сильное решение, которое представимо в виде

$$x_t=\Phi_t\left[\eta+\int_0^t \Phi_s^{-1} b_0(s)\,ds+\int_0^t \Phi_s^{-1}\sigma(s)\,dw_s\right],$$

где Φ_t — матрица размера $d\times d$, являющаяся решением фундаментального уравнения

$$\Phi_t=E_{d\times d}+\int_0^t b_1(s)\Phi_s\,ds$$

($E_{d\times d}$ — единичная матрица размера $d\times d$).

2. О понятии слабого решения СДУ вида (1.1)—(1.2) фактически уже говорилось в § 4 гл. 1. В связи с понятиями сильного и слабого решения отметим, что Б. С. Цирельсоном построен пример одномерного СДУ вида (1.1) с единичной диффузией и ограниченным сносом (зависящим от всего «прошлого»), не имеющего сильных решений, но имеющего слабое решение.

В марковском же случае, т. е. для случая (1.3) (см. ниже) уравнение с единичной диффузией и измеримым, ограниченным сносом имеет единственное сильное решение.

3. Марковский случай. Теоремы Ямады — Ватанабэ. Рассматривается d-мерное уравнение

$$dx_t=\sigma(t, x_t)\,dW_t+b(t, x_t)\,dt,\qquad t\geqslant 0, \tag{1.3}$$

с неслучайным начальным условием

$$x_0=x. \tag{1.4}$$

Здесь b, σ — измеримые, ограниченные функции: $b: R_+ \times E^d \to E^d$, $\sigma: R_+ \times E^d \to E^d \times E^d$. Важное значение в теории сильных решений играет следующий принцип Ямада—Ватанабэ.

Теорема 1.3 (Ямада — Ватанабэ [58]). Пусть уравнение (1.3) — (1.4) имеет слабое решение и решение (1.3) — (1.4) сильно единственно. Тогда это уравнение имеет сильное решение.

Более подробное доказательство теоремы 3, чем в Ямада — Ватанабэ [58], можно найти в А. К. Звонкин, Н. В. Крылов [12]. Отметим, что схема доказательства применима в различных ситуациях: для СДУ с отражением, со скачками, в немарковском случае.

Теорема 1.4 (Ямада — Ватанабэ [58]). Пусть коэффициенты σ и b ограничены и удовлетворяют условиям

$$\|\sigma(t, x) - \sigma(t, x')\| \leqslant \rho_1(|x - x'|),$$
$$|b(t, x) - b(t, x')| \leqslant \rho_2(|x - x'|),$$

где $\rho_1, \rho_2 \in C(R_+; R_+)$, $\rho_1(0) = \rho_2(0) = 0$, ρ_1, ρ_2 возрастают и выпуклы вверх, и при любом $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon \frac{du}{\rho_1(u)} = \infty, \quad \int_0^\varepsilon \frac{du}{\rho_2(u)} = \infty. \tag{1.5}$$

Тогда уравнение (1.3) — (1.4) имеет сильное решение и решение уравнения сильно единственно.

В частности, если σ и b удовлетворяют условию Липшица

$$\|\sigma(t, x) - \sigma(t, x')\| + |b(t, x) - b(t, x')| \leqslant L|x - x'|,$$

то условия теоремы 1.4 выполнены.

Существенно более слабые условия возможны в одномерном случае, $d = 1$.

Теорема 1.5 (Ямада — Ватанабэ [58]). Пусть $d = 1$, коэффициенты σ и b ограничены и

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, x')| \leqslant \rho_1(|x - x'|),$$
$$|b(t, x) - b(t, x')| \leqslant \rho_2(|x - x'|),$$

где $\rho_1, \rho_2 \in C(R_+; R_+)$, $\rho_1(0) = \rho_2(0) = 0$, ρ_1, ρ_2 возрастают и выпуклы вверх, и при любом $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon \frac{du}{\rho_1^2(u)} = \infty, \quad \int_0^\varepsilon \frac{du}{\rho_2(u)} = \infty. \tag{1.6}$$

Тогда уравнение (1.3) — (1.4) имеет сильное решение и решение уравнения сильно единственно.

Условие на модуль непрерывности ρ_1 выполняется, в частности, если $|\sigma(t, x) - \sigma(t, x')| \leqslant L|x - x'|^{1/2}$.

Теоремы 1.4 и 1.5 доказываются с помощью подходящих приближений функции $|u|$ и формулы Ито для выражения $|x_t - x_t'|$, где x_t, x_t' — два решения уравнения. Условия (1.5) или (1.6) для ρ_1, как оказывается, обеспечивают равенство нулю локального времени процесса $|x_t - x_t'|$, а затем некоторые известные неравенства в силу тех же условий (1.5) или (1.6) обеспечивают единственность (при условии Липшица, в частности, последний шаг обеспечивается неравенством Гронуолла — Беллмана). Подробные доказательства см. в Ямада, Ватанабэ [58], или Ватанабэ, Икэда [3].

4. Уравнения с измеримым сносом. В 1972 г. Накао [48] установил существование сильного решения (точнее, сильную единственность, из которой следует и существование сильного решения) одномерного СДУ

$$dx_t = \sigma(x_t)\,dW_t + b(x_t)\,dt, \qquad x_0 = x,$$

с ограниченными, измеримыми σ и b при условии $\sigma(x) \geqslant \varepsilon > 0$ и $\operatorname{var}\sigma < \infty$ с помощью красивых мартингальных методов.

В 1974 г. А. К. Звонкин [11] доказал аналогичный результат для одномерного уравнения

$$dx_t = \sigma(t, x_t)\,dW_t + b(t, x_t)\,dt, \qquad x_0 = x,$$

с ограниченными (или линейно растущими), измеримыми коэффициентами при условии

$$\sigma^2(t, x) \geqslant \varepsilon > 0 \quad \text{и} \quad |\sigma(t, x) - \sigma(t, x')| \leqslant L|x - x'|^{1/2}$$

при помощи специальной замены координат, уничтожающей снос: оказалось, что данное преобразование (о нем см. ниже) сохраняет гельдеровский модуль непрерывности диффузии с показателем 1/2, т. е. сводит задачу к теореме 1.4 Ямады и Ватанабэ. В многомерном случае аналогичный результат о сильном решении А. К. Звонкин доказал в [11] при условии

$$\lambda^* \sigma\sigma^*(t, x)\lambda \geqslant \varepsilon|\lambda|^2 \ (\varepsilon > 0), \qquad |\sigma(t, x) - \sigma(t, x')| \leqslant L|x - x'|,$$

и условии Дини на коэффициент сноса:

$$|b(t, x) - b(t', x')| \leqslant \rho(|x - x'| + |t - t'|^{1/2}),$$

где $\rho(u) \geqslant 0$, $u \geqslant 0$, функция ρ возрастает, выпукла вверх, $\rho(0) = 0$, для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon \frac{\rho(u)}{u}\,du = \infty,$$

и $u^\alpha/\rho(u) \to 0$, $u \to 0$, для всякого $\alpha > 0$. При таких именно условиях такая же замена координат оставляет диффузию липшицевой, т. е. задача сводится к классической теореме Ито (уравнение с коэффициентами, удовлетворяющими условию Липшица).

В [4] для одномерного СДУ установлена сильная единственность в условиях, объединяющих условия Накао и Звонкина. Мы не приводим здесь формулировку, поскольку в следующем разделе сформулирован очень близкий результат для более общего случая с вырождением. Тем не менее, скажем два слова о доказательстве. Идея его предложена Н. В. Крыловым. Само доказательство опирается на оценку распределения стохастического интеграла и технику, примененную Ямада и Ватанабэ. Оказывается, что существуют максимальное и минимальное решения. Если они не совпадают, то это противоречит слабой единственности решения уравнения. Похожие построения использованы в Т. А. Торонджадзе, Р. Я. Читашвили [34], [39]. В многомерном случае имеет место следующая

Теорема 1.6. Пусть выполнены условия

$$\|\sigma(t, x)-\sigma(t, x')\|\leqslant L|x-x'|,$$

и

$$\lambda^*\sigma\sigma^*(t, x)\lambda\geqslant\varepsilon|\lambda|^2, \qquad \varepsilon>0.$$

Тогда уравнение (1.3)—(1.4) имеет сильное решение и решение уравнения сильно единственно.

Идея доказательства состоит в использовании замены переменных Звонкина*), уничтожающей снос. При этом, правда, портится коэффициент диффузии, который в новых переменных уже не удовлетворяет, вообще говоря, условию Липшица. Тем не менее, оказывается, что он имеет производную, локально суммируемую в высокой степени, и это удается использовать в случае невырожденной диффузии. Здесь помогает оценка Н. В. Крылова распределения стохастического интеграла. Подробное доказательство (при несколько более жестких условиях на диффузию) см. в [5]. Сама замена переменных опирается на результаты о разрешимости задачи Коши для систем параболических уравнений — см. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева [25] (где формулировки и доказательства относятся к краевым задачам), А. К. Звонкин [11]. В обеих указанных работах на матрицу $\sigma\sigma^*$ накладывается дополнительное условие равномерной непрерывности по (t, x). Необходимый результат без этого условия содержится в работе А. Ю. Веретенникова [6]. Близкие результаты (ио не для систем, а для одного параболического уравнеиия) установлены Струком, Вараданом в [52, Дополнеиие].

5. Уравнения с вырождающейся диффузией. Как обстоят дела с сильной единственностью и существованием сильного решения, если коэффициент сноса негладкий (измеримый), а диффузия может вырождаться? Мы приведем два варианта (частичного) ответа на этот вопрос. Первый результат является обобщением теоремы 1.6.

---

*) Замена переменных, уничтожающая снос, была известна и ранее (см. И. И. Гихман, А. В. Скороход «Стохастические дифференциальные уравнения».— Киев, Наукова думка.— 1968). А. К. Звонкин впервые применил эту замену для доказательства существования сильных решений.— *Прим ред.*

Пусть $d=d_1+d_2$, где d_1, d_2 — натуральные числа, $\sigma_1:=$ $=(\sigma_{ij}:1\leqslant i\leqslant d_1,\quad 1\leqslant j\leqslant d)$, $\sigma_2:=(\sigma_{ij}:d_1<i\leqslant d,\quad 1\leqslant j\leqslant d)$ $b_1:=(b^i:1\leqslant i\leqslant d_1)$, $b_2:=(b^i:d_1<i\leqslant d)$, $x_1=(x^1,\ldots,x^{d_1})$, $x_2=$ $=(x^{d_1+1},\ldots,x^d)$.

Предполагается невырожденность матрицы $\sigma_1\sigma_1^*$: для всех $t\geqslant$ $\geqslant 0$, $x\in E^d$, $\lambda\in E^{d_1}$

$$\lambda^*\sigma_1\sigma_1^*(t,x)\lambda\geqslant\nu|\lambda|^2 \qquad (\nu>0). \tag{1.7}$$

Лемма. Пусть выполнено условие (1.7), и все коэффициенты непрерывны по $x_2=(x^{d_1+1},\ldots,x^d)$. Тогда уравнение (1.3)—(1.4) имеет решение на некотором вероятностном пространстве.

Эта лемма (А. Ю. Веретенников [7, теорема 1], в однородном случае доказана Нисио [49]) позволяет, в силу теоремы Ямады — Ватанабэ, доказывать лишь сильную единственность, из которой следует существование сильного решения.

Теорема 1.7. Пусть выполнено условие (1.7), все коэффициенты удовлетворяют условию Липшица по переменным x_2 с постоянной C, не зависящей от (t,x_1), функции σ_1, σ_2 и b удовлетворяют условию Липщица по x_1 с той же постоянной C, и функции $a_1(t,x_1,\cdot)=\sigma_1\sigma_1^*(t,x_1,\cdot)$ и $b_1(t,x_1,\cdot)$ при всех t, x_1 имеют две равномерно ограниченные и равностепенно непрерывные производные. Тогда уравнение (1.3)—(1.4) имеет сильное решение и решение сильно единственно.

Идея доказательства такая же, как и в невырожденном случае, однако теперь надо сделать преобразование лишь части координат. При этом возникает задача Коши для параболической системы уравнений, где остальные переменные выступают в роли параметров. Для применения формулы Ито и требуются две непрерывных производных по x_2 от коэффициентов a_1 и b_1. Подробное доказательство см. в [7]. (Отметим, что в [7] пропущено условие равностепенной непрерывности $\nabla^2_{x_1}a_1\ (t,x_1,\cdot)$; кроме того, условия дифференцируемости в указанной работе наложены на σ_1, а не на a_1). Если σ_1 — симметричный, положительно определенный корень из $2a_1$, то при невырожденной a_1 эти варианты эквиваленты.

Таким образом, одна из возможностей для сильной единственности состоит в том, что по тем направлениям, по которым диффузия вырождается, предполагается дополнительная гладкость. Надо сказать, что эти предположения дополнительной гладкости вытекают из метода, и, возможно, они допускают ослабления.

Другую возможность предоставляет нижеследующая теорема 1.8, в которой приводятся результаты лишь для одномерного случая, поскольку многомерные результаты (см. М. Л. Клепцына, А. Ю. Веретенников [17]) имеют до сих пор гораздо меньшую общность. Итак, пусть $d=1$, функция σ представима в виде

$$\sigma(t,x)=\sigma_1(t,x)\sigma_2(t,\sigma_3(x)), \tag{1.8}$$

где σ_1, σ_2, σ_3 — борелевские ограниченные функции, σ_1 и σ_2 удовлетворяют условию Гёльдера

$$|\sigma_1(t,x)-\sigma_1(t,x')|+|\sigma_2(t,x)-\sigma_2(t,x')|\leqslant C|x-x'|^{1/2},$$
$$t\geqslant 0, \qquad x,\ x'\in E^1, \tag{1.9}$$

σ_2 отделена от нуля:

$$\inf_{t,x}\sigma_2(t,x)>0, \tag{1.10}$$

а σ_3 — функция локально ограниченной вариации: для любого $N>0$

$$\operatorname*{var}_{[-N,N]}\sigma_3<\infty. \tag{1.11}$$

Наконец, предполагается, что снос $b(t,x)$ представим в виде

$$b(t,x)=\beta(t,x)+\sigma(t,x)B(t,x), \tag{1.12}$$

где β и B — измеримые ограниченные функции, причем β удовлетворяет условию Липшица

$$|\beta(t,x)-\beta(t,x')|\leqslant C|x-x'|, \tag{1.13}$$

$t\geqslant 0$, $x,x'\in E^1$. Никакая гладкость B не предполагается.

Теорема 1.8 (М. Л. Клепцына [15]). Пусть $d=1$, и выполнены условия (1.8)—(1.13). Тогда уравнение (1.3)—(1.4) имеет сильное решение и решение уравнения сильно единственно.

О некоторых других теоремах о сильной единственности см. работу А. Ю. Веретенникова, М. Л. Клепцыной [9].

6. Теоремы сравнения. Пусть $d=1$. Рассмотрим одновременно два уравнения

$$dx_t^i=\sigma(t,x_t^i)dW_t+b^i(t,x_t^i)dt,\ \ x_0^i=x^i, \tag{1.14}$$

где $i=1, 2$, а b^1, b^2 — борелевские ограниченные функции. Предполагается, что при $i=1, 2$ выполнены условия теоремы 1.8, в частности, каждое уравнение имеет сильное решение и решение сильно единственно.

Теорема 1.9. Пусть $x^1\geqslant x^2$, и при всех t, x справедливо неравенство $b^1(t,x)\geqslant b^2(t,x)$. Тогда $\mathbf{P}(x_t^1\geqslant x_t^2,\ t\geqslant 0)=1$.

Этот результат установлен М. Л. Клепцыной [16]. Ранее в других ситуациях подобные результаты доказывались А. В. Скороходом [33], Ямадой [57], Манабе и Шигой [46]. Основная идея доказательства состоит в том, чтобы, во-первых, свести задачу к ситуации $b^1(t,x)>b^2(t,x)$, $x^1>x^2$, а во-вторых, в этой ситуации установить равенство $\mathbf{P}(\tau:=\inf(t\geqslant 0:x_t^1<x_t^2)=\infty)=1$. Если b^i непрерывны, то последнее равенство получается из следующих соображений. Пусть $\tau':=\inf(t\geqslant 0:x_t^1=x_t^2)<\infty$. Тогда в силу условия $b^1-b^2>0$ и непрерывности b^i, в некоторой окрестности τ' получим $x_t^1 > x_t^2$ $(t \neq \tau')$, откуда и следует, что $\tau = \infty$. Для разрывных b^i удается использовать оценки Крылова.

7. Теоремы существования сильного решения. Теоремы сравнения, в частности, теорема 1.9, дают интересную возможность устанавливать существование сильного решения монотонным предельным переходом, без ссылок на потраекторную единственность, которой может и не быть.

Теорема 1.10. Пусть $d=1$, выполнены условия (1.8)—(1.11), и функция $b(t, \cdot)$ при каждом $t \geqslant 0$ непрерывна. Тогда уравнение (1.3)—(1.4) имеет хотя бы одно сильное решение.

Еще раз подчеркнем, что сильная единственность при фиксированной функции b не утверждается. Однако, если рассматривать семейство функций $(b^\alpha, \alpha \in E^1)$, строго монотонно зависящих от параметра α (например, $b^\alpha(t, x) := b(t, x) + \alpha$), то та же теорема сравнения гарантирует также сильную единственность при всех значениях α, кроме, быть может, счетного числа.

Теорема 1.11. Пусть $d=1$, выполнены условия (1.8)—(1.11), $b^\alpha(t, x) = b(t, x) + \alpha$, и функция $b(t, \cdot)$ при всех $t \geqslant 0$ непрерывна. Тогда при всех $\alpha \in E^1$, исключая, быть может, счетное число значений, решение уравнения

$$dx_t = \sigma(t, x_t)\, dW_t + b^\alpha(t, x_t)\, dt,$$

$$x_0 = x,$$

сильно единственно.

Идея доказательства состоит в использовании монотонности по α: монотонная функция не может иметь более чем счетное число разрывов. Теорема 1.11 доказана М. Л. Клепцыной [16]. Сам метод монотонных приближений впервые применил А. В. Мельников [29], который доказывал сильную единственность для кусочно-непрерывного сноса. Затем теоремы существования без единственности этим методом получали И. В. Федоренко [35], А. В. Мельников [47], М. Л. Клепцына и И. В. Федоренко [18], М. Л. Клепцына [16].

8. Потраекторное решение стохастических дифференциальных уравнений. Само понятие решения стохастического дифференциального уравнения — не потраекторное, решение должно быть задано сразу при всех $\omega \in \Omega$, в этом специфика стохастического интегрирования. Однако, если $\sigma \equiv 1$, а коэффициент b достаточно гладкий, то можно решать уравнение (1.3)—(1.4) при каждом ω, т. е. при каждой траектории $W_t(\omega)$, $t \geqslant 0$, ничего не зная о траекториях W при других значениях ω. Возникает естественный вопрос: в каких ситуациях стохастическое дифференциальное уравнение можно понимать (и решать) как потраекторное уравнение при каждом ω, и можно ли при этом операцию стохастического интегрирования понимать в некотором потраекторном смысле, т. е. определять значение величины $\int \sigma(s, x_s(\omega))\, dW_s(\omega)$ только по траекториям $x_t(\omega)$ и $W_t(\omega)$

при фиксированном ω. На этот вопрос в общей ситуации до сих пор нет удовлетворительного ответа: все известные результаты на эту тему требуют выполнения условия полной интегрируемости или условия Фробениуса относительно матрицы диффузии, и определенной, как правило, довольно ограничительной, гладкости коэффициентов. Условие полной интегрируемости σ обычно формулируется также с использованием производных, однако, сущность этого условия, в действительности, с гладкостью коэффициентов не связана. Само это условие возникает из метода, который заключается в том, что винеровская траектория заменяется некоторым гладким приближением, и устанавливается возможность непрерывно продолжить соответствующий оператор с гладких на все непрерывные траектории. Условие непрерывности этого оператора и есть условие полной непрерывности. В случае $d=1$, тем не менее, условие полной интегрируемости, как правило, выполняется почти автоматически (см. ниже).

Условие полной интегрируемости. Пусть функция $\sigma(t, \cdot)$ непрерывно дифференцируема при каждом $t\geqslant 0$. Тогда $\sigma(t, \cdot)$ при каждом $t\geqslant 0$ вполне интегрируема, если при всех $\xi, \eta \in E^d$

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\sigma(t, x)\right)\sigma(t, x)\xi\right)\eta=\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\sigma(t, x)\right)\sigma(x, t)\eta\right)\xi.$$

Смысл этого условия, фактически, не связанный с дифференцируемостью σ, заключается в однозначной разрешимости в C^1 задачи

$$\frac{dy}{dx}=\sigma(t, y),$$

(при фиксированном t) с произвольным начальным условием $y(x_0)=y_0$, — см., например, Картан [14].

Следующая теорема установлена М. А. Красносельским и А. В. Покровским [19] (в этой работе рассмотрена более общая ситуация, когда матрица диффузии зависит и от значения $W_t: \sigma(t, x_t, W_t)$). Ее удобнее сформулировать для стохастического уравнения в форме Стратоновича.

Теорема 1.12. Пусть выполнено условие полной интегрируемости $\sigma(t, \cdot)$ при каждом $t\geqslant 0$, функция σ дважды непрерывно дифференцируема и ее первые производные ограничены, а функция b непрерывно дифференцируема. Тогда решение стохастического дифференциального уравнения в форме Стратоновича

$$dx_t=\sigma(t, x_t)\circ dW_t+b(t, x_t)\,dt, \qquad t\geqslant 0, \qquad x_0=x,$$

представимо в виде $x_t=V_t[0, x]W$, где $V_t[0, x]u$ — непрерывное продолжение на $C[0, \infty; E^d]$ оператора, переводящего функцию $u\in C^1[0, \infty; E^d]$ в решение уравнения

$$dX_t=\sigma(t, X_t)\dot{u}_t dt+b(t, X_t)\,dt,\ t\geqslant 0,\ X_0=x. \qquad (1.15)$$

Непрерывное продолжение этого оператора существует.

4*

Аналогичные результаты (с $\sigma=\sigma(t,x)$) установили Досс [41], [42], Сусман [55]. Новые теоремы о непрерывной зависимости для уравнений по семимартингалам получены В. Мацкявичусом [28 и др.], Дьёндем.

Ослабить требования «лишней» гладкости на σ и b не удается, вообще говоря, даже в одномерном случае. Здесь есть лишь частные результаты, один из которых приводится ниже.

Теорема 1.13. Пусть $d=1$, $\sigma\equiv 1$, функция $b(x)$ $(x\in E^1)$ непрерывна. Тогда решение уравнения

$$x_t(\omega)=x+W_t(\omega)+\int_0^t b(x_s(\omega))\,ds, \tag{1.16}$$

с вероятностью 1 единственно.

Отметим, что в силу условия непрерывности b уравнение (1.16) имеет хотя бы одно решение при любой непрерывной траектории W_t, $t\geqslant 0$.

Единственность здесь понимается в смысле обыкновенных дифференциальных уравнений, т. е. при фиксированном $\omega\in\Omega$. Доказательство (см. А. Ю. Веретенников, М. Л. Клепцына [10]) основано на разложении винеровского процесса на фиксированном отрезке времени в ряд по синусам и косинусам (см., например, Ватанабэ, Икэда [3]) и на теореме сравнения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Результат теоремы 1.13 распространяется и на случай $\sigma\not\equiv 1$ при условии $\inf\limits_x \sigma(x)>0$ и $\sigma\in C^1(E^1)$ (А. Ю. Веретенников, М. Л. Клепцына [10]). В этом случае, однако, возникает вопрос о том, что есть *потраекторное решение стохастического дифференциального уравнения*. Один из возможных способов рассуждений состоит в следующем. Сделаем замену координат, после которой диффузия станет тождественно равной единице, в этих новых координатах решим уравнение, и затем сделаем обратную замену. При этом возникает естественный вопрос: определен ли в каком-либо смысле «потраекторный» стохастический интеграл

$$\int_0^t \sigma(x_s)\,dW_s:=x_t-x_0-\int_0^t b(x_s)\,ds,$$

именно как интеграл (а не просто как правая часть данного равенства). Оказывается, что ответ на этот вопрос утвердительный: этот стохастический интеграл действительно можно понимать как предел интегральных сумм Римана—Ито при неограниченном измельчении интервалов разбиения, если фильтр разбиений фиксирован заранее, например, в качестве точек разбиения берутся двоично-рациональные точки. Доказательство основано на «потраекторной» формуле Ито, которая, в свою очередь, основана на определении квадратичной вариации «типичной» винеровской траектории. Похожий подход использовали М. А. Красносельский, А. В. Покровский в [19].

Из единственности почти наверное в смысле обыкновенных дифференциальных уравнений для уравнения (1.16) вытекает и единственность в смысле сильных решений (которая, правда, уже известна: это лишь еще один способ ее установить).

Пока данный метод не дал результатов в случаях $d>1$, при $d=1$ и измеримой функции b, и даже при $d=1$ и непрерывной b, зависящей от времени.

Еще один подход к потраекторным решениям, связанный с описанием всех — неупреждающих и упреждающих — решений предложен Т. А. Торонджадзе и Р. Я. Читашвили [39].

9. Контрпримеры: теоремы Цирельсона и Барлоу. Существование слабых решений СДУ — марковского и немарковского типа — установлено при очень широких ограничениях. Первые простые контрпримеры существования сильного решения для уравнения $dx_t=\sigma(x_t)dW_t$, $x_0=x$, с невырожденной ограниченной диффузией построены Танакой и Крыловым. В примере Танаки размерность $d=1$, $\sigma(x)=I(x\geqslant 0)-I(x<0)$; в примере Крылова $d=2$, а матрица диффузии имеет вид

$$\sigma(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \dfrac{-x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \\ \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \end{pmatrix},$$

— см. обсуждение этих и некоторых других примеров в статье А. К. Звонкина, Н. В. Крылова [12]. Отметим одно интересное свойство обоих примеров: если x_t — (слабое) решение, то его модуль $|x_t|$ является $\mathscr{F}_t^W$ — согласованным, хотя, как было сказано, x_t таким свойством обладать не может.

В работе А. К. Звонкина, Н. В. Крылова [12] сформулированы три важнейшие нерешенные к тому времени проблемы теории сильных решений. В настоящее время все они решены. Существование сильного решения СДУ $dx_t=b(t, x_t)dt+dW_t$, $x_0=x$, с ограниченным, измеримым сносом b ($d\geqslant 1$) следует из приведенной выше теоремы 1.6. Другие две задачи получили отрицательные решения в примерах Цирельсона и Барлоу.

Пример Цирельсона [36] относится к одномерному уравнению

$$dx_t=\alpha(t, x_0^t)dt+dW_t, \quad x_0=x, \tag{1.17}$$

где $\alpha(t, x_0^t)$ — измеримый ограниченный неупреждающий функционал. Пусть $\{a\}$ — дробная часть числа a, (t_k, $k=0, -1, -2, \ldots$) — последовательность положительных чисел,

$\lim\limits_{k\to-\infty} t_k=0$, и $0<t_{k-1}<t_k$. Положим

$$\alpha(t, x_0^t)=\begin{cases}\left\{\dfrac{x_{t_k}-x_{t_{k-1}}}{t_k-t_{k-1}}\right\}, & t\in[t_k, t_{k+1}),\ k=-1,\ -2, \dots,\\ 0, \quad t=0 \quad \text{или} \quad t\geqslant t_0.\end{cases}$$

Теорема 1.14 (Б. С. Цирельсон [36]). Уравнение (1.17) не имеет сильного решения.

Усовершенствованное доказательство теоремы Цирельсона, предложенное Н. В. Крыловым, можно прочитать в книге Ватанабэ, Икэды [3]

Результат Барлоу относится к одномерному СДУ

$$dx_t=\sigma(x_t)\,dW_t, \quad x_0=x, \tag{1.18}$$

с невырожденной непрерывной диффузией.

Теорема 1.15 (Барлоу [37]). Пусть $\sigma(x)$ — непрерывная функция и существуют такие положительные постоянные c_1, c_2, c_3, c_4, α, β, что

а) $0<\alpha<1/2$;

б) $\alpha\leqslant\beta<\alpha+\min(\alpha/(\alpha+2),\ (\alpha-2\alpha^2)/(1+2\alpha))$;

в) $0<c_1<\sigma^2(x)<c_2$, $x\in[x_1, x_2]$;

г) $|\sigma(x)-\sigma(y)|\leqslant c_3|x-y|^\alpha$, $x, y\in[x_1, x_2]$;

д) для любых x, y, $x_1\leqslant x<y\leqslant x_2$, найдутся такие x', y', $x\leqslant x'<y'\leqslant y$, что $|x'-y'|>c_4|x-y|$ и $|\sigma(x')-\sigma(y')|>$ $>c_4|x'-y'|^\beta$.

Тогда при $x_0\in(x_1, x_2)$ решение уравнения (1.18) не может быть сильно единственным.

Доказательство — весьма хитроумное — см. в [37]. Там же построен простой пример функции $\sigma(x)$, удовлетворяющий условиям теоремы, и тем самым показано, что множество таких функций непусто.

§ 2. Слабые решения стохастических дифференциальных уравнений с негладкими коэффициентами в E^d

1. Теория стохастических дифференциальных уравнений в своем развитии повторяла теорию обыкновенных дифференциальных уравнений: от теоремы существования решения уравнения с липшицевыми коэффициентами был сделан шаг к непрерывным коэффициентам (А. В. Скороход [31]). Идея доказательства была заимствована из обыкновенных дифференциальных уравнений: ломаные Эйлера, условие компактности Арцела—Асколи. Конечно, специфика стохастических объектов не могла не внести новых проблем — оказалось, что для допредельных процессов нельзя гарантировать относительную ком-

пактность в смысле сходимости по вероятности. А. В. Скороход преодолел эту трудность с помощью метода одного вероятностного пространства: построил такое вероятностное пространство, на котором ломаные Эйлера сходились по вероятности. И некоторое время никто не замечал, что предельный процесс хотя и является решением уравнения (1.19), но совсем не в том смысле, как это определялось в § 1. А именно, решение оказалось не «сильным», а «слабым» — не было согласовано с потоком, порожденным винеровским процессом. Осмысление этого факта привело к заключению, что при нерегулярных коэффициентах диффузии и сноса соответствующие процессы надо описывать не как решения стохастических дифференциальных уравнений, а как решения некоторой проблемы мартингалов.

2. Фиксируем натуральное d. Обозначим через $C=\{X\}$ пространство непрерывных E^d — значных функций на $[0, \infty)$, $\mathscr{C}$ — σ-алгебру борелевских множеств C, $\mathbf{C}$ — естественный поток σ-алгебр на C.

Пусть на $[0, \infty)\times C$ заданы функции $\sigma=\sigma_t(X)$ и $b=b_t(X)$ со значениями в пространстве $d\times d$-мерных матриц и в E^d, соответственно, являющиеся измеримыми $\mathbf{C}$-согласованными случайными процессами.

Рассмотрим уравнение

$$dX_t=\sigma_t(X)\,dW_t+b_t(X)\,dt. \tag{1.19}$$

Определение 1.1. Слабым решением уравнения (1.19) с начальным условием $x\in E^d$ называется процесс X со значениями в E^d и непрерывными траекториями, определенный на некотором стохастическом базисе $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ с $\mathbf{F}$-винеровским процессом W, такой, что $X_0=x$ $\mathbf{P}$ — п. н., X $\mathbf{F}$ — согласован и выполнено (1.19).

Обозначим $a=\frac{1}{2}\sigma\sigma^*$

Определение 1.2 (раздел 6.0, гл. 6 [51]). Решением (a, b) — проблемы *мартингалов* называется $\mathbf{P}$ на $(C, \mathscr{C})$ такая, что для любой $f\in C_0^2(E^d)$ процесс

$$f(X_t)-\int_0^t\left(\sum_{i,j=1}^d a_s^{ij}(X)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X_s)+\sum_{i=1}^d b_s^i(X)\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\right)ds,$$

является $\mathbf{C}$-мартингалом.

Следующая теорема показывает, что в этих двух определениях речь идет фактически об одном и том же объекте.

Теорема 1.16 (предложение 2.1, § 2, гл. IV [3]). Распределение всякого слабого решения является решением проблемы мартингалов. Всякое решение проблемы мартингалов является распределением некоторого слабого решения.

Определение 1.3. Будем говорить, что решение уравнения (1.19) слабо единственно, если при любом $x\in E^d$ все слабые решения (1.19) с начальным условием $X_0=x\in E^d$ одинаково распределены в $(C, \mathscr{C})$.

Теорема 1.17 (следствие леммы 1.2, гл. IV [3]). Сильная единственность уравнения (1.10) влечет слабую единственность.

Следующая теорема показывает, что в вопросах существования и единственности решения (1.19) определяющую роль играет коэффициент σ.

Теорема 1.18 (теорема 4.2, § 4, гл. IV [3]). Пусть c — ограниченная функция на $[0, \infty)\times C$ со значениями в E^d, являющаяся измеримым $\mathbf{C}$ — согласованным процессом. Существование (соответственно, единственность) решения уравнения (1.19) эквивалентно существованию (соответственно, единственности) решения следующего уравнения

$$dX_t=\sigma_t(X)\,dW_t+[b_t(X)+\sigma_t(X)\,c_t(X)]dt.$$

Следствие. Если функция $\sigma^{-1}b$ определена и ограничена, то существование (соответственно, единственность) решения уравнения (1.19) эквивалентно существованию (соответственно, единственности) решения уравнения без сноса

$$dX_t=\sigma_t(X)\,dW_t.$$

3. Будем говорить, что функция f на $[0, \infty)\times E^d$ является марковской, если f зависит только от (t, X_t).

Теорема 1.19. Пусть для некоторого $c>0$ при всех t, X

$$(\|\sigma\|^2+|b|^2)_t(X)\leqslant c\,(1+\sup_{s\leqslant t}|X_s|^2).$$

Слабое решение уравнения (1.19) существует в каждом из следующих случаев:

1) функции σ и b при каждом t непрерывны по X ([31], [40], [44]);

2) функция σ — марковская равномерно невырожденная (теорема 1, § 6, гл. II [23]);

3) при $d\geqslant 2$ и некотором $k\in\{1, \ldots, d-1\}$ функции σ, b непрерывны по $(x_1, \ldots, x_k)$, матрица $(\sigma^{i,j})_{i=k+1, j=1}^{i,j=d}$ марковская и равномерно невырожденная ([49], [7]);

Доказательство. Прежде всего отметим, что поскольку коэффициенты σ и b имеют линейный рост, то без ограничения общности их можно считать ограниченными (см. гл. 10 [51]).

В каждом из случаев 1), 2), 3) идея доказательства одна и та же — приблизить σ и b «хорошими» функциями σ^n и b^n, для которых существует сильное решение X^n уравнения

$$dX_t^n=\sigma_t^n(X^n)\,dW_t+b_t^n(X^n)\,dt, \tag{1.20}$$

и затем перейти к слабому пределу его распределения по n.

1°. Пусть выполнено 1). Для $X \in C$ и $t \geqslant 0$ обозначим $X_{\wedge t}$ функцию, принимающую в момент s значение $X_{s \wedge t}$. Возьмем натуральное n и положим $t_n = \frac{1}{n}[nt]$ (скобки [ ] обозначают целую часть), $\sigma_t^n(X) = \sigma_t(X_{\wedge t_n})$, $b_t^n(X) = b_t(X_{\wedge t_n})$, $t \geqslant 0$. Уравнение 1.20 имеет сильное решение X^n, поскольку его коэффициенты «почти не зависят» от X. Проверим, что «характеристики» $\int_0^t b_s^n(X^n)\,ds$, $\int_0^t a_s^n(X^n)\,ds$ процесса X^n сходятся к предельным: $\int_0^t b_s(X)\,ds$, $\int_0^t a_s(X)\,ds$.

Пусть $K \subseteq C$ — компакт. При фиксированном s ограничение функции b_s на K дает ограниченную и равномерно непрерывную функцию. Обозначим V_s модуль непрерывности этой функции. Тогда при $X \in K$

$$\int_0^t |b_s - b_s^n|(X)\,ds = \int_0^t |b_s(X) - b_s(X_{\wedge s_n})|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t V_s\Big(\sup_{u \in [s_n, s]} |X_u - X_{s_n}|\Big)\,ds.$$

В силу теоремы Арцела—Асколи (добавление 1 [1])

$$\sup_{u \in [s_n, s]} |X_u - X_{s_n}| \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

равномерно по $X \in K$. Отсюда с помощью теоремы Лебега о мажорированной сходимости выводим, что правая часть неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно на K, а значит, левая тоже. Аналогично

$$\int_0^t |a_s - a_s^n|(X)\,ds \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

равномерно на K. Согласно варианту предельной теоремы для семимартингалов (см. гл. 4), это значит, что распределение решения X^n имеет предельную точку и она является решением (a, b) — проблемы мартингалов.

2°. Пусть выполнено 2). Согласно следствию к теореме 1.18, можно считать $b \equiv 0$. В силу марковости σ, существует борелевская функция σ_M на $[0, \infty) \times E^d$ такая, что $\sigma_t(X) = \sigma_M(t, X_t)$. Фиксируем $t > 0$ и построим последовательность непрерывных функций σ^n, сходящуюся к σ_M в $L_{d+1}([0, t] \times E^d)$. Пусть X^n — решение (1.20). В силу оценки Н. В. Крылова (теорема 4 § 3 гл. II [23])

$$\mathbf{E}\int_0^t \|\sigma_M-\sigma^n\|(s, X_s^n)\,ds \leqslant \mathrm{const}\cdot\|\sigma_M-\sigma^n\|_{L_{d+1}},$$

где константа не зависит от n. Заканчивается доказательство, как и в случае 1°, с помощью предельной теоремы для семимартингалов (см. гл. 4).

3°. В случае 3) доказательство получается комбинацией доказательств в случаях 1) и 2).

Теорема 1.20. Пусть функции σ и b локально ограничены и на ограниченных подмножествах C удовлетворяют одному из условий:

1) для некоторых $L>0$ и неубывающей непрерывной функции $K:[0,\infty)\to[0,\infty)$ при всех t, X, Y

$$\|\sigma_t(X)-\sigma_t(Y)\|^2+|b_t(X)-b_t(Y)|^2\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^t |X_s-Y_s|\,dK_s+L|X_t-Y_t|;$$

(теорема 4.6, § 4, гл. 4 [26]);

2) σ — марковская, матрица $\frac{1}{2}\sigma\sigma^*$ равномерно невырождена и при всех $x\in E^d$ и $T\geqslant 0$

$$\lim_{y\to x}\sup_{s\in[0,T]}\|a^M(s,x)-a^M(s,y)\|=0;$$

(гл. 7, [51]);

3) $d=1$, σ — марковская, матрица $\frac{1}{2}\sigma\sigma^*$ равномерно невырождена (упражнение 7.3.3 [51]);

4) $d=2$, σ — марковская, матрица $\frac{1}{2}\sigma\sigma^*$ не зависит от времени и равномерно невырождена (упражнение 7.3.4 [51]);

5) σ — марковская, равномерно невырождена и кусочно постоянна по отношению к некоторому разбиению E^d на конечное число многогранников [20].

Тогда решение уравнения (1.19) слабо единственно.

Доказательство единственности в случаях 2)—4) в общих чертах основано на следующих идеях. Достаточно установить, что для любой гладкой финитной f математическое ожидание

$$\mathbf{E}\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X_t)\,dt$$

имеет одно и то же значение для всех слабых решений уравнения (1.19) с начальным условием $X_0=x$. Обозначим его $u(x)$, $x\in E^d$. Опираясь на формулу Ито, эту задачу можно свести к вопросу о разрешимости уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{d} a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{d} b^i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda u = f$$

в классе $C_b{}^2$. Факт разрешимости устанавливается методами теории возмущений.

§ 3. Дифференцирование решений СДУ по начальным данным

1. Дифференцирование по начальным данным является частным случаем дифференцирования по параметру, но вынесено в заглавие параграфа ввиду его важности. Здесь известны два типа теорем: дифференцирование в *нормах* L_p и *поточечное*. Первое проще выводить, и оно требует меньшей гладкости коэффициентов. Второе требует несколько большей гладкости, и это связано с тем, что вывод основан на теоремах вложения. Дальнейшее изложение следует в основном, работам Н. В. Крылова [23] и Ю. Н. Благовещенского н М. И. Фрейдлина [2].

Определение 1.4. Обозначим через $\mathscr{L}[0, T](\mathscr{L}[0, T; E^d])$ пространство действительнозначных (соответственно, d-мерных) случайных процессов x_t на $[0, T]$, измеримых по (t, ω), и имеющих при всех $q \geqslant 1$ конечную норму

$$\left(\mathbf{E} \int_0^T |x_t|^q dt \right)^{1/q}.$$

Через $\mathscr{L}B[0, T](\mathscr{L}B[0, T; E^d])$ обозначается пространство всех сепарабельных процессов x_t с конечной нормой

$$(\mathbf{E} \sup_{[0,T]} |x_t|^q)^{1/q}$$

при всех $q \geqslant 1$. Если $T > 0$ фиксировано, то вместо $\mathscr{L}[0, T]$, $\mathscr{L}B[0, T]$ будем обычно писать $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}B$, и такие же обозначения сохраним для $\mathscr{L}[0, T; E^d]$ и $\mathscr{L}B[0, T; E^d]$, если это не приведет к путанице. Естественным образом определяется сходимость, непрерывность и дифференцируемость в $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}B$ (см. Н. В. Крылов [23, гл. 2, § 7]). Например, последовательность процессов $x_t{}^n \in \mathscr{L} (n \geqslant 1)$ сходится к $x_t \in \mathscr{L}$, если при всех $q \geqslant 1$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E} \int_0^T |x_t^n - x_t|^q dt = 0.$$

Предел x_t обозначается через $(\mathscr{L})\lim$ (соответственно, $(\mathscr{L}B)\lim$ в $\mathscr{L}B$).

Пусть процесс $x_t \in \mathscr{L} (\mathscr{L}B)$ зависит от параметра $p \in E^d : x_t = x_t{}^p$, $p \in E^d$, — и задан единичный вектор $l \in E^d$. Процесс $y \in \mathscr{L} (\mathscr{L}B)$ называется $\mathscr{L}$-производной ($\mathscr{L}B$-производной) $x_t{}^p$ в точке p_0 по направлению l,

$$y_t=(\mathscr{L})\frac{\partial}{\partial l}x_t^p|_{p=p_0}\quad\left(y_t=(\mathscr{L}B)\frac{\partial}{\partial l}x_t^p|_{p=p_0}\right),$$

если

$$y_t=(\mathscr{L})\lim_{r\downarrow 0}\frac{1}{r}\left(x_t^{p_0+rl}-x_t^{p_0}\right)$$

$$\left(y_t=(\mathscr{L}B)\lim_{r\downarrow 0}\frac{1}{r}\left(x_t^{p_0+rl}-x_t^{p_0}\right)\right).$$

Процесс x_t^p один раз $\mathscr{L}$-дифференцируем ($\mathscr{L}B$-дифференцируем) в точке p_0, если он имеет $\mathscr{L}$-производные ($\mathscr{L}B$-производные) в точке p_0 по всем направлениям. Процесс x_t^p называется i раз ($i\geqslant 2$) $\mathscr{L}$-дифференцируемым ($\mathscr{L}B$-дифференцируемым) в точке p_0, если он один раз $\mathscr{L}$-дифференцируем ($\mathscr{L}B$-дифференцируем) в некоторой окрестности p_0 и всякая его $\mathscr{L}$-производная ($\mathscr{L}B$-производная) по любому направлению $i-1$ раз $\mathscr{L}$-дифференцируема ($\mathscr{L}B$-дифференцируема) в точке p_0.

Если $(\mathscr{F}_t)$ — некоторый поток σ-алгебр, и процесс x_t^p согласован с этим потоком, то все его $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}B$-производные, которые определены, могут быть выбраны $(\mathscr{F}_t)$-согласованными (см. Н. В. Крылов [23]). Отметим, что справедлива теорема о непрерывности и дифференцируемости сложной функции (Н. В. Крылов [23], теорема 2.7.9).

2. Сформулируем теперь теорему о непрерывности и дифференцируемости по параметру решений СДУ. Пусть E — некоторое евклидово пространство, $\mathscr{D}\subset E$ — область (изменения параметров), T, $L\geqslant 0$ — фиксированные постоянные, при $t\in[0, T]$, $x\in E^d$, $p\in\mathscr{D}$, определены случайные матрицы $\sigma_t(p, x)$ размера $d\times d$, $b_t(p, x)$ — случайные d-мерные векторы, все $(\mathscr{F}_t)$ — согласованные, и при всех p, t, ω, x, y

$$\|\sigma_t(p, x)-\sigma_t(p, y)\|+|b_t(p, x)-b_t(p, y)|\leqslant L|x-y|.$$

Пусть $\xi_t(p)$ $(t\in[0, T], p\in\mathscr{D})$ — $(\mathscr{F}_t)$ — согласованный случайный процесс, $\xi_t(p)\in\mathscr{L}$. Рассмотрим решение x_t^p СДУ

$$x_t^p=\xi_t(p)+\int_0^t\sigma_s(p, x_s^p)\,dW_s+\int_0^t b_s(p, x_s^p)\,ds, \tag{1.21}$$

где W_t — d-мерный винеровский процесс. Уравнение (1.21) имеет сильное решение, принадлежащее пространству $\mathscr{L}$ (Н. В. Крылов [23] следствие 2.5.6 и теорема 2.5.7). Если $\xi_t(p)\in\mathscr{L}B$ при всех p, то и $x_t^p\in\mathscr{L}B$ (Н. В. Крылов [23], следствие 2.5.10).

Теорема 1.21 (Н. В. Крылов [23], теорема 2.8.1). Пусть $\sigma_t(p, x)\to\sigma_t(p_0, x)$, $b_t(p, x)\to b_t(p_0, x)$ в $\mathscr{L}$ при $p\to p_0\in\mathscr{D}$ для всякого $x\in E^d$, и $\xi_t(p)\to\xi_t(p_0)$ в $\mathscr{L}$ при $p\to p_0$. Тогда $x_t^p\to x_t^{p_0}$ в $\mathscr{L}$, $p\to p_0$.

Если к тому же $\xi_t(p)\to\xi_t(p_0)$ в $\mathscr{L}B$ при $p\to p_0$, то $x_t^p\to x_t^{p_0}$ в $\mathscr{L}B$ при $p\to p_0$.

Теорема 1.22 (Н. В. Крылов [23], теорема 2.8.4). Пусть процесс $\xi_t(p)$ i раз ($\mathscr{L}$-непрерывно) $\mathscr{L}$-дифференцируем в точке $p_0\in\mathscr{D}$, функции $\sigma_s(p, x)$, $b_s(p, x)$ при всех s, ω i раз непрерывно дифференцируемы по p, x при $p\in\mathscr{D}$, $x\in E^d$, и все эти производные до порядка i включительно по норме не превосходят $L(1+|x|)^m (m\geqslant 0)$ для любых $p\in\mathscr{D}$, s, ω, x. Тогда процесс x_t^p i раз ($\mathscr{L}$-непрерывно) $\mathscr{L}$-дифференцируем в точке p_0. Если еще процесс $\xi_t(p)$ i раз ($\mathscr{L}B$-непрерывно) $\mathscr{L}B$-дифференцируем в точке p_0, то и процесс x_t^p обладает этим же свойством.

Частным случаем теоремы 1.22 является теорема о дифференцируемости решения СДУ по начальным данным: здесь в роли параметра p выступает (неслучайное) значение x_0, а коэффициенты не зависят от него.

Сформулируем теперь результат Ю. Н. Благовещенского и М. И. Фрейдлина о дифференцируемости по начальным данным почти наверное, т. е. предположим, что $\xi_t(p)\equiv p$.

Теорема 1.23 (Ю. Н. Благовещенский, М. И. Фрейдлин [2]). Пусть $\xi_t(p)\equiv p$, функции $\sigma_s(p, x)$, $b_s(p, x)$ при всех s, ω i раз непрерывно дифференцируемы по p, x при $p\in\mathscr{D}$, $x\in E^d$, и все эти производные до порядка i включительно по норме не превосходят $L(1+|x|)^m (m\geqslant 0)$ для любых $p\in\mathscr{D}$, s, ω, x. Тогда процесс x_t^p $(i-1)$-раз непрерывно дифференцируем по p.

Идея доказательства состоит в использовании известного критерия Колмогорова непрерывности процесса. Пусть $i=1$ (при $i>1$ доказательство проводится по индукции). Составим разность

$$\zeta_l(p, t, y) := \frac{1}{y}\left(x_t^{p+yl} - x_t^p\right),$$

где $y>0$ — число, $l\in E^d$, $|l|=1$. Можно доказать, что

$$\mathbf{E}\,|\zeta_l(p, t, y)-\zeta_l(p', t', y')|^{2p}\leqslant C(|y-y'|^{2p}+|p-p'|^{2p}+ \\ +|t-t'|^p) \qquad (1.22)$$

Эта оценка позволяет, в силу критерия Колмогорова, сделать (при достаточно большом p) вывод о непрерывной продолжимости поля $\zeta_l(p, t, y)$ при $y\downarrow 0$. В самом деле, пусть $y_n=2^{-n}$, и

$$\zeta_l(p, t, 0) := \zeta_l(p, t, 1)+\sum_{n=1}^{\infty}(\zeta_l(p, t, y_n)-\zeta_l(p, t, y_{n-1})).$$

В силу оценки (1.22) ряд сходится в любой норме L_q, $q\geqslant 1$ (по критерию Коши), и предельное значение $\zeta_l(p, t, 0)$ можно подставить в левую часть (1.22), т. е. положить в ней $y'=0$. Тогда из критерия Колмогорова получим непрерывность $\zeta_l(p, t, y)$ по (p, t, y) при $y\geqslant 0$. Отсюда следует, что процесс x_t^p

дифференцируем по любому направлению непрерывно относительно (p, t).

Как уже отмечалось выше, дифференцируемость почти наверное можно также выводить с применением теорем вложения Соболева.

§ 4. Инвариантная мера диффузионного процесса

Рассмотрим однородное d-мерное стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ)

$$dx_t = b(x_t)\,dt + \sigma(x_t)\,dW_t, \quad t \geqslant 0, \tag{1.23}$$

с ограниченными, измеримыми коэффициентами σ и b, не фиксируя пока начальное значение x_0. Будем предполагать, что любое решение СДУ (1.23) с любым неслучайным начальным условием x_0 является слабо единственным (для чего достаточно, например, невырожденности и непрерывности диффузии, или условия Липшица на σ и b). В этом случае решение $(x_t^x$ (x — начальное условие) является строго марковским процессом (см. [22]). Обозначим (x_t) марковское семейство процессов $(x_t^x,\ x \in E^d,\ t \geqslant 0)$.

Как и ко всякому строго марковскому процессу, к (x_t) при определенных условиях возвратности применимы общие теоремы о существовании инвариантной меры.

Теорема 1.24. Пусть при некотором $x \in E^d$ распределения временных средних $T^{-1} \int_0^T x_s^x ds$ слабо компактны при $T \to \infty$. Тогда процесс (x_t) имеет хотя бы одно стационарное распределение.

Единственность стационарной меры имеет место тогда, когда процесс не имеет различных (существенных) эргодических классов. Можно дать следующее достаточное условие единственности. Обозначим $\sigma^0 = b + \sigma'\sigma/2$, σ^i $(1 \leqslant i \leqslant d)$ — вектор-столбцы матрицы σ, $\mathrm{Lie}\,(b;\ \sigma)(x)$ — линейное пространство, порожденное векторами $\sigma^i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant d$, и всевозможными скобками Ли $[\sigma^i, \sigma^j](x)$, $[[\sigma^i, \sigma^j], \sigma^k](x), \ldots$, где $1 \leqslant i \leqslant d$, $0 \leqslant j, k, \ldots, \leqslant d$.

Теорема 1.25. Пусть выполнено хотя бы одно из двух условий:

$$\text{A.} \inf_x \ \lambda^* \sigma\sigma^*(x)\lambda \geqslant \gamma |\lambda|^2, \quad \gamma > 0.$$

B. $b, \sigma \in C_0^\infty(E^d)$, и $\inf\limits_x \dim \mathrm{Lie}(b; \sigma) = d$. Тогда существует не более одной стационарной меры процесса x_t.

Для *общих марковских процессов* условия единственности стационарной меры можно найти в теореме 1.23 из [33]. Условия этой теоремы используют: *а*) понятия неприводимости и ограниченности по вероятности, которые для решений СДУ обсуждаются в теореме 1.24 из [33] (в этой теореме условия более общие, чем в теореме 1.25 настоящего параграфа, однако, коэффициенты обязательно непрерывны) и *b*) теорему 1.25 из [33] (в которой ограниченность процесса по вероятности выводится из существования некоторой функции Ляпунова).

2. *Скорость* сходимости к инвариантной мере при каком-нибудь условии невырожденности, например, при условиях (A) или (B) теоремы 1.25 зависит от того, насколько хороши возвратные свойства процесса. Приведем несколько результатов о сходимости по вариации, а также об оценках скорости сходимости для общих марковских процессов, а затем — простые достаточные условия для проверки этих оценок в терминах коэффициентов СДУ. Через $\mathbf{P}_t$ обозначаем распределение x_t, $\mathbf{P}(x, t, \cdot)$ — переходная вероятность процесса x_t, $t \geqslant 0$.

Теорема 1.26 (Б. А. Севастьянов [30]). Однородный марковский процесс на фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$ имеет единственное стационарное распределение μ, которое является эргодическим (т. е. $\operatorname{var}(\mathbf{P}_t - \mu) \to 0$, $t \to \infty$, при любом $\mathbf{P}_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $C \in \mathscr{B}$, вероятностная мера π на X, числа $t_1 > 0$, $m > 0$, $M > 0$, и для любого начального распределения $\mathbf{P}_0$ найдется такое t_0, что

1) $m\pi(A) \leqslant \mathbf{P}(x, t_1, A)\ \forall x \in C,\ A \subset C,\ A \in \mathscr{B}$ при любом $t \geqslant t_0$

2) $\mathbf{P}_t(C) \geqslant 1 - \varepsilon$;

3) $\mathbf{P}_t(A) \leqslant M\pi(A) + \varepsilon\ \forall A \subset C,\ A \in \mathscr{B}$.

Следующие две теоремы доказываются методом, аналогичным методу, примененному в [8] для оценки скорости перемешивания.

Теорема 1.27. Пусть выполнено хотя бы одно из условий (A) или (B) теоремы 1.25, x_0 неслучайно, и для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ найдутся ограниченное множество $\mathscr{K}_\delta \in \mathscr{B}^d$ и функция $0 \leqslant h_\delta(x)$, $x \in E^d$, равная на $\mathscr{K}_\delta$ тождественно единице, что $\lim\limits_{|x| \to \infty} h_\delta(x) = \infty$, и выполнены следующие два неравенства:

1) для всякого $x \notin \mathscr{K}_\delta$

$$\mathbf{E} \exp(\delta \tau(x)) \leqslant h_\delta(x),$$

где $\tau(x) := \inf(t \geqslant 0 : x_t^x \in \mathscr{K}_\delta)$;

2) для всех $x \in E^d$ и $t \geqslant 0$

$$\mathbf{E}_x h_\delta(x_t) \leqslant C_\delta h_\delta(x), \quad C_\delta \geqslant 1,$$

причем $C_\delta \downarrow 1$ при $\delta \downarrow 0$. Тогда при некоторых C, $\lambda > 0$ и $\delta > 0$ для всех $t \geqslant 0$, $x_0 \in E^d$ имеет место оценка

$$\operatorname{var}(\mathbf{P}_t - \mu) \leqslant C \exp(-\lambda t) h_\delta^2(x_0).$$

Теорема 1.28. Пусть выполнено хотя бы одно из условий (A) или (B) теоремы 1.25, x_0 неслучайно, и найдутся такие число $k \geqslant 1$, ограниченное множество $\mathscr{K} \in \mathscr{B}^d$, функция $h(x)$, $x \in E^d$, что $\lim\limits_{|x| \to \infty} h(x) = \infty$, $h(x) I(x \in \mathscr{K}) \equiv 1$, и выполнено следующие два неравенства:

1) $$\mathbf{E}\tau(x)^k \leqslant h(x);$$

2) для всех $x_0 \in E^d$, $t \geqslant 0$

$$\mathbf{E}h(x_t) \leqslant C_k h(x) \quad (C_k > 0).$$

Тогда при некотором $C > 0$ справедлива оценка

$$\operatorname{var}(P_t - \mu) \leqslant C(1+t)^{-k}(\ln t)^{k-1}h^2(x_0).$$

Для общих строго марковских процессов условия невырожденности (A) или (B) можно заменить следующим условием типа «локального условия Деблина»:

$$\inf_{t\geqslant 0}\ \inf_{x,x'\in\mathcal{K}_\delta}\int\limits_{\mathcal{K}_\delta} 1 \wedge \frac{\mathbf{P}_{t,x'}(x_{t+1}\in dy)}{\mathbf{P}_{t,x}(x_{t+1}\in dy)}\,\mathbf{P}_{t,x}(x_{t+1}\in dy) > 0 \qquad (1.24)$$

($d\mathbf{P}_1/d\mathbf{P}_2$ означает производную абсолютно непрерывной части). Если выполнено условие (B), то выполнено и (1.24). Если выполнено условие (A), то (1.24) также имеет место, что можно вывести из неравенства Харнака, доказанного Н. В. Крыловым и М. В. Сафоновым в [24].

Условия (1) и (2) теоремы 1.27 для СДУ выполнены, в частности, если справедливо неравенство

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}}\,(b(x),\ x/|x|) < 0.$$

Если допускается линейный рост σ и b, то те же условия можно обеспечить соотношением

$$\lim_{|x|\to\infty}\left[\frac{\|\sigma\,\sigma^*(x)\|}{(b(x),\ x/|x|)}\right]^{-1} = -\infty.$$

§ 5. Носитель диффузии

1. Как устроен носитель решения стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = \sigma(X_t)\,dW_t + b(X_t)\,dt? \qquad (1.25)$$

Оказывается, гораздо легче ответить на этот вопрос, если его слегка перефразировать: как устроен носитель решения стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = \sigma(X_t)\circ dW_t + b(X_t)\,dt, \qquad (1.26)$$

где знак $\circ$ указывает на то, что дифференциал понимается в смысле Стратоновича (см. § 1 гл. III [3]). Ответ имеет следующий вид. Если обозначить

$$\mathcal{P}(x) = \{X : X = x + \int\limits_0^{\cdot}\sigma(X_t)\dot{W}_t\,dt + \int\limits_0^{\cdot} b(X_t)\,dt,$$

$$W \text{ — произвольная гладкая функция}\},$$

то носитель распределения решения уравнения (1.26) с начальным условием $X_0=x$ есть $\overline{\mathscr{S}(x)}$. В основе этого факта лежат два обстоятельства:

1) для гладких траекторий W уравнение (1.26) (как, впрочем и, (1.25)) можно решать как обыкновенное дифференциальное уравнение;

2) отображение $W\to X$, определяемое (1.26), «непрерывно» (см. раздел 8 § 1 и раздел 32.5 [19]).

Остается только понять, откуда в этой проблематике появилось уравнение в форме Стратоновича (1.26). Оказывается, форма Стратоновича нужна, чтобы обеспечить свойство непрерывности решения как функции винеровской траектории. Возьмем простейшее одномерное уравнение:

$$dX_t=\sigma(X_t)\,dW_t, \tag{1.27}$$

где функция σ гладкая и равномерно положительная. На множестве гладких траекторий W определено отображение, ставящее гладкой функции W в соответствие решение X обыкновенного дифференциального уравнения

$$dX_t=\sigma(X_t)\,\dot{W}_t dt$$

с начальным условием $X_0=x$. Убедимся, что это отображение допускает непрерывное продолжение на все непрерывные траектории W. Обозначим

$$F(u)=\int\limits_x^u \frac{dv}{\sigma(v)},\ u\in(-\infty,\ \infty),$$

G — функцию, обратную к F. Тогда $X_t=G(W_t)$, $t\in[0,\infty)$, будет искомым продолжением. Но $X_t=G(W_t)$, $t\in[0,\infty)$, не является решением (1.27): по формуле Ито

$$dX_t=\frac{dG}{dx}(W_t)\,dW_t+\frac{1}{2}\,\frac{d^2G}{dx^2}(W_t)\,dt,$$

или, переходя от G обратно к F,

$$dX_t=\sigma(X_t)\,dW_t+\frac{1}{2}\,\sigma\frac{d\sigma}{dx}\,(X_t)\,dt\equiv\sigma\,(X_t)\circ dW_t!.$$

Наконец, покажем, как выглядит ответ на первоначальный вопрос в одномерном случае. Эквивалентная запись уравнения (1.25)

$$dX_t=\sigma(X_t)\circ dW_t+\left(b-\frac{1}{2}\,\sigma\,\frac{d\sigma}{dx}\right)(X_t)\,dt,$$

(см. формулу (1.10) § 1 гл. III [3]). Таким образом, чтобы получить носитель распределения решения уравнения (1.25) с начальным условием $X_0=x$, нужно замкнуть множество

$$\{X: X=x+\int_0^{\cdot}\sigma(X_t)\dot{W}_t dt+\int_0^{\cdot}\left(b-\frac{1}{2}\sigma\frac{d\sigma}{dx}\right)(X_t)\,dt,$$

$$W \text{ — произвольная гладкая функция}\}.$$

Перейдем к точным формулировкам. Фиксируем натуральное d.

Пусть C — пространство непрерывных функций на $[0,\infty)$ со значениями в E^d с топологией равномерной сходимости на конечных отрезках, $\mathscr{C}$ — его борелевская σ-алгебра, $\mathbf{C}$ — естественный поток σ-алгебр на C.

Пусть на E^d заданы удовлетворяющие условию Липшица функции $\sigma=\sigma(x)$ и $b=b(x)$ со значениями в пространстве $d\times\times d$-матриц и в E^d соответственно.

Теорема 1.29 (теорема 4.20 § 4 гл. II [50] или теорема 8.1 гл. VI [3]). Пусть $x\in E^d$, X — решение уравнения (1.26) с начальным условием $X_0=x$, $\mathbf{P}_x$ — его распределение. Тогда $\operatorname{supp}\mathbf{P}_x=\overline{\mathscr{S}}(x)$.

Доказательство проводится следующим образом. Фиксируем вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ и определенный на нем винеровский процесс W. Введем кусочно-линейный процесс W^ε, аппроксимирующий при $\varepsilon\to 0$ винеровский процесс W, и по нему построим процесс X^ε, удовлетворяющий уравнению

$$X^\varepsilon=x+\int_0^{\cdot}\sigma(X_t^\varepsilon)\,dW_t^\varepsilon+\int_0^{\cdot}b(X_t^\varepsilon)\,dt.$$

Показывается, что распределение X^ε слабо сходится при $\varepsilon\to 0$ к мере $\mathbf{P}_x$, а значит, справедливо включение $\operatorname{supp}\mathbf{P}_x\subseteq\overline{\mathscr{S}_p}(x)$, где

$$\mathscr{S}_{\mathrm{P}}(x)=\left\{X\in C: X=x+\int_0^{\cdot}\sigma(X_t)\,dW_t+\int_0^{\cdot}b(X_t)\,dt,\ W \text{ — произвольная кусочно-гладкая функция из } C\right\}.$$

Нетрудно понять, что $\overline{\mathscr{S}_{\mathrm{P}}(x)}=\overline{\mathscr{S}(x)}$, а значит, $\operatorname{supp}\mathbf{P}_x\subseteq\overline{\mathscr{S}(x)}$. На самом же деле здесь имеет место равенство. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1.30 (теорема 4.20 § 4 гл. II [50] или теорема 8.2 гл. VI [3]). Пусть $x\in E^d$, $V\in C$ — гладкая функция, X^V — решение уравнения

$$X^V=x+\int_0^{\cdot}\sigma(X_t^V)\dot{V}_t dt+\int_0^{\cdot}b(X_t^V)\,dt,$$

X — решение уравнения (1.26) с начальным условием $X_0=x$. Тогда для любых $\varepsilon>0$ и $T>0$

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \mathbf{P}\Big(\sup_{t\in[0,T]} |X_t-X_t^V|>\varepsilon \,\Big|\, \sup_{t\in[0,T]}|W_t-V_t|\leqslant\delta\Big)=0.$$

Стохастические дифференциалы Ито и Стратоновича связаны соотношением

$$\sigma(X_t)\circ dW_t=\sigma(X_t)\,dW_t+\frac{1}{2}\hat{\sigma}(W_t)\,dt,$$

где $\hat{\sigma}$ — d-мерный вектор, i-ая координата которого равна $\operatorname{tr}\left(\frac{\partial\sigma_i}{\partial x}\sigma\right)$, σ_i — i-ая строка матрицы σ (см. § 1 гл. III [3]). Поэтому для уравнения Ито (1.25) теорема 1.29 модифицируется следующим образом.

Теорема 1.31. Пусть $x\in E^d$, X — решение уравнения (1.25) с начальным условием $X_0=x$. Тогда носитель распределения X — это замыкание множества

$$\Big\{X: X=x+\int_0^{\cdot}\sigma(X_t)\dot{W}_t\,dt+\int_0^{\cdot}(b-\hat{\sigma})(X_t)\,dt,$$

W — произвольная гладкая функция$\Big\}$.

Известная глубокая связь между теорией диффузионных процессов и теорией уравнений с частными производными применительно к теореме 1.30 проявляется в выводимом из этой теоремы в качестве следствия принципе максимума. Сформулируем его в виде отдельной теоремы 1.32.

Пусть G — открытое множество в $E^1\times E^d$, $u\in C^{1,2}(G)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}(\sigma\sigma^*)^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{d}\left(b^i+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^i\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\geqslant 0,$$

в G, $(t_0,x_0)\in G$, $G(t_0,x_0)$ — замыкание в G точек $(t_1, Y_{t_1-t_0})$, где $t_1\geqslant t_0$, $Y\in\mathscr{S}(x_0)$ и $(t, Y_{t-t_0})\in G$ при всех $t\in[t_0,t_1]$.

Теорема 1.32. (следствие (4.21) § 4 гл. II [50]). Если $u(t_0,x_0)=\max\limits_G u$, то $u|_{G(t_0,x_0)}\equiv u(t_0,x_0)$.

Доказательство основано на вычислении математического ожидания $u(t,X_t)$ по формуле Ито. При этом используется приведенное выше соотношение между стохастическими дифференциалами Ито и Стратоновича.

2. Пусть X — диффузионный процесс. Иногда возникают следующие вопросы: какая из двух данных гладких кривых, начинающихся в одной и той же точке, более вероятна как траектория X; какая среди всех возможных гладких кривых, соединяющих две заданные точки, наиболее вероятна как траектория X? Дать ответ на эти вопросы позволяет вычисление меры трубчатой области вокруг гладкой кривой.

Пусть $T \geqslant 0$, $x \in E^d$, функция $b: E^d \to E^d$ принадлежит C^∞ и ее производные ограничены,

$$X = x + W + \int_0^{\cdot} b(X_t)\,dt,$$

$$Y \in C^2([0, \infty), E^d), \qquad Y_0 = 0.$$

Теорема 1.33 (теорема 5.15 § 5 гл. II [50]). Существуют числа C и $\lambda > 0$ такие, что

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} |X_t - Y_t| < \varepsilon\right) \sim C e^{-\lambda T/\varepsilon^2} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T |\dot{Y}_t - b(Y_t)|^2\,dt - \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{div} b(Y_t)\,dt\right)$$

при $\varepsilon \downarrow 0$.

Пример (замечание 5.15 § 5 гл. II [50]). Пусть процесс X за время T переходит из нуля в $x \in E^d$. Наиболее вероятная траектория Y должна минимизировать функционал

$$\frac{1}{2}\int_0^T |\dot{Y}_t - b(Y_t)|^2\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{div} b(Y_t)\,dt.$$

Обычная техника вариационного исчисления позволяет получить уравнение Эйлера для этой задачи. В частности, при $b \equiv 0$, очевидно, $Y_t = \frac{t}{T}\,x$, $t \in [0, T]$.

В заключение отметим, что результаты, изложенные в этом парграфе, принадлежат Струку и Варадану [53], [54].

§ 6. Стохастические дифференциальные уравнения в областях

1. Неформальное описание и основные обозначения. Пусть дана замкнутая область в евклидовом пространстве. Попытаемся уяснить для себя, как устроен процесс, принимающий значения в этой замкнутой области и ведущий себя как решение стохастического дифференциального уравнения. Видимо, на границе такой процесс должен испытывать некоторое воздействие, обеспечивающее его удержание в замкнутой области. Естественно представлять себе это воздействие как своеобразный снос в стохастическом дифференциальном уравнении и приписать каждой точке границы направление сноса. Итак, рассмотрим уравнение

$$dX_t = \sigma(X_t)\,dW_t + b(X_t)\,dt + d\varphi_t,$$

где φ — «снос на границе», являющийся непрерывным процессом ограниченной вариации, возрастающим только на границе, направление которого в точке x границы есть $\gamma(x)$, $|\gamma(x)|=1$:

$$d\varphi_t = I_{\partial O}(X_t)\gamma(X_t)\,d|\varphi|_t,$$

(∂O — граница области, $|\varphi|$ обозначает вариацию φ). В отличие от обычного сноса этот снос φ как функция времени, как правило, является *сингулярным*. Вот простейший пример — винеровский процесс в $[0, \infty)$, отражающийся от точки 0:

$$dX_t = dW_t + d\varphi_t,$$

φ_t — непрерывный возрастающий процесс,

$$d\varphi_t = I_{\{0\}}(X_t)\,d\varphi_t, \quad \varphi_0 = 0, \quad W_0 = 0.$$

Поскольку $W_t + \varphi_t = X_t \geqslant 0$, то $\varphi_t \geqslant -W_t$, но $\varphi_t = \max\limits_{s\in[0,t]} \varphi_s \geqslant \max\limits_{s\in[0,t]}(-W_s) = \min\limits_{s\in[0,t]} W_s$. Оказывается, однако (это было установлено А. В. Скороходом, см. [27], раздел 3.9), имеет место равенство $\varphi_t = -\min\limits_{s\in[0,t]} W_s$. Так как в силу закона повторного логарифма (см. раздел 1.8 [13]) с вероятностью 1 $\min\limits_{s\in[0,t]} W_s$ является сингулярной функцией по t типа канторовой «лестницы», то и φ является сингулярной функцией по t.

Как искать решение стохастического дифференциального уравнения в области? Как и в случае всего пространства, естественно рассмотреть последовательные приближения (ср. доказательство теоремы 4.6 гл. 4 [26]):

$$dX_t^n = \sigma(X_t^{n-1})\,dW_t + b(X_t^{n-1})\,dt + d\varphi_t^n,$$

$$d\varphi_t^n = I_{\partial O}(X_t^n)\,\gamma(X_t^n)\,d|\varphi_t^n|.$$

Таким образом, для каждого элементарного события мы должны решить следующую детерминированную задачу: по заданной траектории, в данном случае по функции

$$\int_0^{\cdot} \left(\sigma(X_t^{n-1})\,dW_t + b(X_t^{n-1})\,dt\right),$$

построить отражающий процесс (φ^n) и отраженную траекторию (X^n). К решению этой задачи, оказывается, в принципе сводится вся проблематика стохастических дифференциальных уравнений с отражением. Называется она задачей Скорохода, который впервые рассмотрел ее в одномерном случае в [32] (см. изложение в гл. III раздел 4.2 [3]).

Прежде чем переходить к точным формулировкам, введем обозначения. При этом для большей общности разрешим в каждой точке границы иметь не одно направление отражения, а целое множество.

Такая ситуация естественно возникает в случае разрывного поля γ — в точках разрыва приходится допускать выпуклое замыкание предельных значений γ. Например, при нормальном отражении в выпуклой области в качестве возможных направлений отражения допускаются все нормали в данной точке.

Фиксируем натуральное d. Обозначим C — пространство непрерывных функций на $[0, \infty)$ со значениями в E^d с топологией равномерной сходимости на конечных отрезках, $\mathscr{C}$ — его борелевскую σ-алгебру, $\mathbf{C}$ — естественный поток σ-алгебр на C.

O — область в E^d, ∂O — ее граница, $\bar{O}=O\cup\partial O$, $\gamma:\partial O\to E^d$ многозначная функция, ставящая в соответствие $x\in\partial O$ некоторое множество $\gamma(x)$ векторов из E^d с единичной длиной.

2. Задача Скорохода. Для функции $W\in C$ с $W_0\in\bar{O}$ рассмотрим «задачу Скорохода»: найти функцию $\Phi(W)$, такую, что

1) функция $\Phi(W)$ принимает значения в $\bar{O}$;

2) функция $\varphi=\Phi(W)-W$ в нуле равна нулю, имеет локально ограниченную вариацию $|\varphi|$ и для почти всех t по мере $|\varphi|$ $\frac{d\varphi_t}{d|\varphi|_t}\in I_{\partial O}\gamma(X_t)$ (то есть функция φ изменяется только на множестве $\{X_t\in\partial O\}$ и приращения φ в точке t «имеют направление» из $\gamma(X_t)$).

Теорема 1.34. Пусть верно одно из следующих предположений:

1) O ограниченная выпуклая область, γ — поле нормалей ([56]);

2) $O=\{x\in E^d: x^i>0,\ i=1,\ldots,d\}$, после γ на грани $\{x^i=0\}$ задается i-ой строкой $(p^{i1},\ldots,p^{id})$ матрицы P, у которой на диагонале едииицы, остальные элементы неположительны и спектральный радиус матрицы $(I-P)$ строго меньше 1 (на пересечении граней γ — нормированное выпуклое замыкание своих значений на соответствующих гранях) ([43]).

Тогда для любой $W\in C$ с $W_0\in\bar{O}$ существует единственное решение задачи Скорохода $\Phi(W)$. Отображение $\Phi: C\to C$ непрерывно.

Следствие 1. В условиях теоремы 1.34 Φ — измеримый $\mathbf{C}$-согласованный процесс на C.

Следствие 2. Пусть $O=\{x\in E^d: x^1>0\}$, γ — нормаль к граничной гиперплоскости. Тогда Φ определяется формулой

$$\Phi_t^1(W)=-\inf_{s\in[0,t]} W_s^1\wedge 0,\quad \Phi_t^i=W_t^i,\quad i=2,\ldots,d.$$

3. Стохастическое дифференциальное уравнение с отражением. Пусть на $[0,\infty)\times C$ заданы функции $\sigma=\sigma_t(X)$ и $b=b_t(X)$ со значениями в пространстве $d\times d$-матриц и в E^d, соответственно, являющиеся $\mathbf{C}$-согласованными случайными процессами. Через $\|\sigma\|$ будем обозначать $\frac{1}{2}\operatorname{tr}\sigma\sigma^*$.

Рассмотрим в $\bar{O}$ стохастическое дифференциальное уравнение с отражением на границе:

$$dX_t = \sigma_t(X)\,dW_t + b_t(X)\,dt + d\varphi_t. \tag{1.28}$$

Определение 1.5. *Слабым решением* уравнения (1.28) называется процесс X со значениями в $\bar{O}$ и непрерывными траекториями, определенный на некотором стохастическом базисе $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ с $\mathbf{F}$-винеровским процессом W такой, что X $\mathbf{F}$-согласован, процесс

$$\varphi = \left(\varphi_t \overset{\text{def}}{\equiv} X_t - X_0 - \int_0^t \sigma_s(X)\,dW_s - \int_0^t b_s(X)\,ds,\ t \in [0, \infty)\right)$$

имеет локально ограниченную вариацию $|\varphi|$ и

$$\frac{d\varphi_t}{d\,|\varphi|_t} \in I_{\partial O}\gamma(X_t)\ d\mathbf{P}d\,|\varphi|_t\text{ — почти всюду.}$$

Определение 1.6. Слабое *решение* уравнения (1.28) называется *сильным*, если оно согласовано с потоком, порожденным X_0 и W.

Теорема 1.35. Пусть σ и k ограничены и при каждом t непрерывны по x. Если задача Скорохода имеет единственное решение Φ и отображение $\Phi: C \to C$ непрерывно, то уравнение (1.28) имеет слабое решение при любом начальном распределении в $\bar{O}$.

Доказательство основывается на следующем наблюдении: если X — решение, то в силу единственности решения задачи Скорохода $X = \Phi(Y)$ с

$$Y_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s(X)\,dW_s + \int_0^t b_s(X)\,ds,\ t \in [0, \infty),$$

а значит,

$$dY_t = \sigma_t(\Phi(Y))\,dW_t + b_t(\Phi(Y))\,dt. \tag{1.29}$$

Теперь воспользуемся рассуждением в «обратном направлении». В силу варианта теоремы 1.19, 1) § 2 уравнение (1.29) с данным начальным распределением имеет слабое решение. Но тогда $X = \Phi(Y)$ удовлетворяет (1.28).

Замечание. Мы нигде не встречали этой простой теоремы. Во всех работах по стохастическим дифференциальным уравнениям с отражением [3], [43], [45], [56] авторы, установив существование, единственность и непрерывность решения задачи Скорохода, для доказательства существования решения (1.28) привлекают специальные конструкции — сжимающие отображения, замену времени.

С помощью теорем 1.34 и 1.35 можно получить следующую теорему.

Теорема 1.36. Пусть σ и b ограничены и при каждом t непрерывны по X. Уравнение (1.28) имеет слабое решение в каждом из следующих случаев:

1) O — выпуклая ограниченная область, γ — поле нормалей;

2) $O=\{x\in E^d : x^i>0,\ i=1,\ldots,d\}$, $\gamma|_{\{x^i=0\}}$

— постоянный вектор, $i=1,\ldots,d$ (на пересечениях граней γ — нормированное выпуклое замыкание своих значений на соответствующих гранях);

3) O ограничено, O и γ C^2-гладкие, проекция γ на нормаль к границе положительна.

Доказательство. В условиях 1) и 2) утверждение теоремы есть непосредственное следствие теорем 1.34 и 1.35. В условиях 3) решение существует локально: надо взять карту, в которой граница имеет вид гиперплоскости, а поле γ — нормали к ней. В силу ограниченности коэффициентов и вида Φ (следствие 2 теоремы 1.34), процесс не может слишком часто менять карты атласа, а значит, его можно определить на $[0, \infty)$.

Применяя технику локализации (см. гл. 10 [51]), можно получить следующие результаты в неограниченных областях с растущими коэффициентами.

Теорема 1.37. Пусть функции σ и b при каждом t непрерывны по X и для некоторого $c>0$ при всех t, X

$$(\|\sigma\|^2+|b|^2)_t(X)\leqslant c\,(1+\sup_{s\leqslant t}|X_s|^2).$$

Слабые решения уравнения (1.28) существуют в каждом из следующих случаев:

1) O — выпуклая область, γ — поле нормалей ([56]);

2) выполнено предположение 2) теоремы 1.36;

3) O — полупространство, γ — C^2 — гладкое поле, проекция γ на нормаль равномерно положительна,

$$\left(\sum_{i=1}^{d}(\sigma^{1i})^2+(b^1)^2\right)_t(X)\leqslant c\,(1+\sup_{s\leqslant t}|X_s^1|^2).$$

Доказательство. Для простоты пусть $X_0=0\in O$. Под $C(c, t)$ будем понимать различные константы, зависящие только от c и t.

1°. Для любой ограниченной области мы можем построить локальное решение — до момента выхода из этой области. Для доказательства существования глобального решения достаточно показать, что все локальные решения равномерно ограничены по вероятности на конечных временных интервалах, см. гл. 10 [51].

2°. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ заданы d-мерный $\mathbf{F}$-винеровский процесс W и измеримые $\mathbf{F}$-согласованные процессы: Z в $[0, \infty)$ с непрерывными траекториями, τ в

E^d, f в E^1. Если при каждом t **P**-п. н.

$$Z_t \leqslant Z_0 + \int_0^t \tau_s dW_s + \int_0^t f_s ds$$

и

$$(|\tau|^2 + f^2)_t \leqslant c\,(1 + \sup_{s \in [0,t]} Z_s^2),$$

то $\mathbf{E} \sup_{s \in [0,t]} Z_s^2 \leqslant C(c, t)(1 + \mathbf{E} Z_0^2)$. Действительно, $\sup_{s \in [0,t]} Z_s^2$ не превосходит суммы таких же супремумов от квадрата каждого слагаемого в правой части. Беря ожидание этих супремумов и оценивая $\sup_{s \leqslant t} \left(\int_0^t \tau_s dW_s \right)^2$ с помощью неравенства Дуба (теорема 2 § 9 гл. 1 [26]), из леммы Гронуолла — Беллмана (лемма 4.13 § 4 гл. 4 [26]) получаем требуемую оценку.

3°. Пусть область O ограничена. Тогда для любого $t > 0$ существует $C(c, t)$ такое, что для любого слабого решения X уравнения (1.28) $\mathbf{E} \sup_{s \in [0,t]} |X_s|^2 \leqslant C(c, t)$.

Действительно

$$d|X_t|^2 = 2X_t dX_t + \|\sigma_t(X)\| dt \leqslant$$
$$\leqslant 2X_t \sigma_t(X) dW_t + 2X_t b_t(X) dt + \|\sigma_t(X)\| dt,$$

поскольку $X_s d\varphi_s \leqslant 0$. Неравенство следует из того, что для любой $x \in \partial O$ и любой нормали n в точке x $(x, n) = -(0 - x, n) \leqslant 0$ в силу выпуклости O. Применяя оценку 2° к процессу $|X_t|^2$, получим:

$$\mathbf{E} \sup_{s \in [0,t]} |X_s|^4 \leqslant C(c, t).$$

4°. Из 1° и 3° следует утверждение теоремы при условии 1).

5°. При условии 2) доказательство строится точно так же, поскольку $X_s d\varphi_s$ снова неположительно.

6°. Обозначим $\sigma^1 = (\sigma^{11}, \ldots, \sigma^{1d})$. Пусть выполнено условие 3) и коэффициенты σ, b ограничены. Рассмотрим процесс X^1 в $[0, \infty)$:

$$d(X_t^1)^2 = 2X_t^1 dX_t^1 + \|\sigma_t(X)\| dt =$$
$$= 2X_t^1 \sigma_t^1(X) dW_t + 2X_t^1 b_t^1(X) dt + \|\sigma_t(X)\| dt.$$

Применяя оценку 2° к процессу $(X_t^1)^2$, получим:

$$\mathbf{E} \sup_{s \in [0,t]} (X_s^1)^4 \leqslant C(c, t).$$

но в силу следствия 1 теоремы (1.34)

$$\varphi_t^1 = -\inf_{s\in[0,t]}\left(X_0^1 + \int_0^s \sigma_u^1(X)\,dW_u + \int_0^s b_u^1(X)\,du\right)\wedge 0,$$

поэтому

$$\varphi_t^1 \leqslant \left(-\inf_{s\in[0,t]}\int_0^s \sigma_u^1(X)\,dW_u - \inf_{s\in[0,t]}\int_0^s b_u^1(X)\,du\right)\vee 0.$$

Отсюда с помощью неравенства Дуба (теорема 2 § 9 [26]) и оценки $\mathbf{E}\sup\limits_{s\in[0,t]}(X_s^1)^4$ получаем $\mathbf{E}(\varphi_t^1)^2 \leqslant C(c, t)$. Далее, по формуле Ито

$$d|X_t|^2 = 2X_t dX_t + \|\sigma_t(X)\|\,dt =$$
$$= 2X_t\sigma_t(X)\,dW_t + 2X_t b_t(X)\,dt + \|\sigma_t(X)\|\,dt + \gamma(X_t)\,d\varphi_t,$$

откуда, в силу 2° и уже имеющейся оценки $\mathbf{E}(\varphi_t^1)^2$, получаем $\mathbf{E}|X_t|^4 \leqslant C(c, t)$.

7°. Из 1° и 6° следует утверждение теоремы при условии 3).

По аналогии с определением потраекторной единственности решения уравнения (1.1) § 1 во всем пространстве, можно дать определение потраекторной единственности решения уравнения (1.28).

Определение 1.7. Мы говорим, что для уравнения (1.28) имеет место сильная, или потраекторная единственность решения, если для любых двух его слабых решений X и X', определенных на одном стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ с одним и тем же $\mathbf{F}$-винеровским процессом W из равенства $X_0 = X_0'$ $\mathbf{P}$ — п. н. следует, что $X_t = X_t'$ для всех $t \geqslant 0$ $\mathbf{P}$ — п. н.

В случае «области» справедлив следующий аналог теоремы 4.6 гл. 4 [26].

Теорема 1.38. Пусть для некоторых $L > 0$ и неубывающей непрерывной функции $K: [0, \infty) \to [0, \infty)$ при всех $t \in [0, \infty)$ и $X, Y \in C$

$$\|\sigma_t(X) - \sigma_t(Y)\|^2 + |b_t(X) - b_t(Y)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t |X_s - Y_s|^2 dK_s + L|X_t - Y_t|^2.$$

Тогда сильная единственность имеет место в следующих случаях:

1) O — выпуклая область, γ — поле нормалей [56];

2) $O = \{x \in E^d : x^1 > 0\}$, γ — C^2-гладкое и проекция γ на нормаль равномерно положительна (по-видимому, результат принадлежит [45]).

Доказательство. 1°. Пусть выполнено условие 1), X и X' — два решения уравнения (1.28), φ и φ' — соответствующие процессы ограниченной вариации. Тогда

$$|X_t - X'_t|^2 = \int_0^t 2(X_s - X'_s)\, d(X_s - X'_s) + \int_0^t \|\sigma_s(X) - \sigma_s(X')\|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t 2(X_s - X'_s)(\sigma_s(X) - \sigma_s(X'))\, dW_s +$$

$$+ \int_0^t 2(X_s - X'_s)(b_s(X) - b_s(X'))\, ds + \int_0^t \|\sigma_s(X) - \sigma_s(X')\|\, ds,$$

поскольку $(X_s - X_s')(d\varphi_s - d\varphi_s') \geqslant 0$ (неравенство следует из того, что для любого $x \in \partial O$, любой нормали n в точке x и любой $x' \in \bar{O}$ в силу выпуклости $\bar{O}$ $(x' - x, n) \geqslant 0$). Завершается доказательство, как и в случае всего пространства (см. теорему 4.6 гл. 4 § 4 [26]).

2°. Случай 2) сводится к случаю 1) с помощью локальных координат, переводящих γ в поле нормалей.

Применяя теорему 1.3 (Ямада—Ватанабэ) § 1, получаем:

Теорема 1.39. Пусть выполнены условия теорем 1.37 и 1.38. Тогда существует сильное решение уравнения (1.28).

Уравнение (1.28) создано для описания процессов, мгновенно отражающихся от границы. Это показывает следующая

Теорема 1.40. Пусть $O = \{x \in e^d : x^1 > 0\}$, $\sum_{i=1}^d (\sigma^{1i})^2 \Big|_{\{X_s^1 = 0\}}$ не обращается в нуль. Тогда для любого решения X уравнения (1.28)

$$\int_0^\infty I_{\partial O}(X_s)\, ds = 0 \quad \mathbf{P}\text{—п. н.}$$

Доказательство. Рассмотрим семимартингал $\int_0^t I_{\partial O}(X_s)\, dX_s$. Приближая этот интеграл римановыми суммами (см. пункт г) леммы 4.4 § 2 гл. 4 [26]), убеждаемся, что он не убывает по t, а значит, имеет нулевую квадратическую вариацию. С другой стороны, его квадратическая вариация равна

$$\frac{1}{2} \int_0^t I_{\partial O}(X_s) \sum_{i=1}^d (\sigma_s^{1i}(X))^2 ds,$$

откуда и следует утверждение.

4. Стохастические дифференциальные уравнения с отражением и с задержкой на границе. Кроме рассмотренных процессов с мгновенным отражением, бывают еще процессы с отражением, проводящие на границе ненулевое время. Внутри же области они ведут себя по-прежнему как решения стохастических дифференциальных уравнений.

Пусть, кроме O, γ, σ, b, задана еще функция $\rho:[0, \infty)\times C\to[0, \infty)$, $\rho=\rho I_{\{X_s\in\partial O\}}$ (ρ — течение времени на границе). Рассмотрим уравнение

$$dX_t=I_O(X_t)\,(\sigma_t(X)\,dW_t+b_t(X)\,dt)+d\varphi_t. \tag{1.30}$$

Определение 1.8. Слабым решением уравнения (1.30) называется процесс X, определенный на некотором стохастическом базисе (Ω, $\mathscr{F}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$) с $\mathbf{F}$-винеровским процессом W такой, что X $\mathbf{F}$-согласован, процесс

$$\varphi=\left(\varphi_t\overset{\text{def}}{=}X_t-X_0-\int_0^t I_O(X_s)\,(\sigma_s(X)\,dW_s+b_s(X)\,ds),\ t\in[0, \infty)\right)$$

имеет ограниченную вариацию $|\varphi|$, $d\varphi_t\in I_{\partial O}\gamma(X_t)\,d\,|\varphi|_t$ $d\mathbf{P}dt$ почти всюду и $I_{\partial O}(X_t)\,dt=\rho_t(X)\,d\,|\varphi|_t$.

Если $\rho|_{\{X_s=0\}}\equiv0$, то получаем мгновенное отражение.

Если $\rho|_{\{X_s=0\}}\equiv1$, то на границе решение (1.30) проводит положительное время, снос γ на границе ничем не отличается от обычного сноса диффузионного процесса во всем пространстве.

Теорема 1.41 (теорема 3.1 [52]; см. также § 7 гл. IV [3]). Пусть O—C_b^2-гладкая, γ непрерывно, на множестве $\{X_s\in\partial O\}$ $(\rho+(\gamma, n))_s(X)$ равномерно положительно и ограничено, σ непрерывно, равномерно положительно определено и ограничено, b измеримо и ограничено. Тогда решение (1.30) существует.

Набросок доказательства. Пусть сначала $\rho\doteq I_{\{X_s\in\partial O\}}$. «Выпустим» решение стохастического дифференциального уравнения с коэффициентами σ, b до момента выхода на границу области. В точке выхода — обозначим ее x — оно сидит случайное время s, $\mathbf{P}(s>t)=e^{-\lambda t}$, затем прыгает в точку $\frac{1}{\lambda}\gamma(x)$ и т. д. При $\lambda\to\infty$ распределение X слабо сходится, предел является решением (1.30) (ср. с теоремой 1.16 § 1в об эквивалентности решений проблемы мартингалов и слабых решений). Чтобы получить произвольное ρ из $\rho=I_{\{X_s\in\partial O\}}$, нужно сделать замену времени

$$\tau_t=\int_0^t(\rho_s(X)+X_{\{X_s\in O\}})\,ds.$$

Теорема 1.42 (теорема 5.7 [52]). Пусть функции σ и ρ являются марковскими, то есть существуют борелевские функции σ_M и ρ_M на $[0, \infty)\times E^d$, принимающие значения в пространстве $d\times d$-матриц и в $[0, \infty)$ соответственно, такие что $\sigma_t(X)=\sigma_M(t, X_t)$, $\rho_t(X)=\rho_M(t, X_t)$, и:

1) $\sigma_M\sigma_M^*$ непрерывна по x равномерно по t и положительно определена;

2) γ и ρ удовлетворяют условию Липшица, причем ρ либо тождественный нуль, либо в нуль не обращается;

3) b ограничено.

Тогда решение уравнения (1.30) единственно в смысле распределения на $(C, \mathscr{C})$ (то есть слабо единственно).

Доказательство слабой единственности проводится так же, как и во всем пространстве, см. конец § 1 b.

Можно было бы определить и сильные решения уравнения (1.30), но, видимо, их вообще не бывает: в своем докладе на конференции «Вероятностные модели процессов управления и надежности» 24—27 мая 1988 г. в Донецке Р. Я. Читашвили опроверг существование сильного решения даже для винеровского процесса в $[0, \infty)$ при $\rho = I_{\{X_s=0\}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977,— 352 с.
2. *Благовещенский Ю. Н., Фрейдлин М. И.* Некоторые свойства диффузионных процессов, зависящих от параметра // Докл. АН СССР.— 1961.— *138,* № 3.— С. 508—511
3. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986.— 446 с.
4. *Веретенников А. Ю.* О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения.— 1979.— *24,* № 2.— С. 348—360
5. — О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений // Мат. сб. 1980.— *111 (153),* № 3.— С. 434—452
6. — Параболические уравнения и стохастические уравнения Ито с коэффициентами, разрывными по времени // Мат. заметки.— 1982.— *31,* № 4.— С. 549—557
7. — О стохастических уравнениях с вырождающейся по части переменных диффузией // Изв. АН СССР. Сер. Мат.— 1983.— *47,* № 1.— С. 189—196
8. — Об оценках скорости перемешивания для стохастических уравнений // Теория вероятностей и ее применения.— 1987.— *32,* № 2.— С. 299—308
9. —, *Клепцына М. Л.* О сильных решениях немарковских стохастических уравнений.— В кн. Методы исследования нелинейных систем управления. М.: Наука. 1983.— С. 3—8
10. —, — О потраекторном подходе к стохастическим дифференциальным уравнениям // Статистика и управление случайными процессами. Сб. ст. п/ред. А. Н. Ширяева. М.: Наука, 1989.— С. 22—23
11. *Звонкин А. К.* Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, уничтожающее снос // Мат. сб.— 1974.— *93 (135),* № 1.— С. 129—149
12. —, *Крылов Н. В.* О сильных решениях стохастических, дифференциальных уравнений // Тр. школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай.— 1974). II. Вильнюс: Ин-т физики и математики.— 1975.— С. 9—88
13. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории.— М.: Мир, 1968.— 394 с.
14. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.— М.: Мир, 1971.— 392 с.

15. *Клепцына М. Л.* О сильных решениях стохастических уравнений с вырождающимися коэффициентами // Теория вероятностей и ее применения. — 1984. *29*, № 2.— С. 392—396
16. —. Теоремы сравнения, существования и единственности для стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения.— 1985. *30*, № 1.— С. 147—152
17. —, *Веретенников А. Ю.* О сильных решениях стохастических уравнений с вырождающей диффузией // Тезисы докл. XV Всесоюз. зимней матем. школы — колл. по теории вероятн. и матем. статистике (Бакуриани.— 1981). Тбилиси: Изд-во Мецниереба.— 1981.— С. 10—11
18. —, *Федоренко И. В.* Существование сильного решения стохастического дифференциального уравнения с вырождающейся диффузией. Управление в сложных нелинейных системах.— М.: Наука.— 1984.— С. 39—41.
19. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Естественные решения стохастических дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР.— 1978.— *240*, № 2.— С. 264—267
20. —, — Системы с гистерезисом.— М.: Наука, 1983.— 271 с.
21. *Крылов Н. В.* О стохастических интегральных уравнениях Ито // Теория вероятностей и ее применения.— 1969.— *14*, № 2.— С. 340—348
22. — О выделении марковского процесса из марковской системы процессов и построении квазидиффузионных процессов // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1973.— *37*, № 3.— С. 691—708.
23. — Управляемые процессы диффузионного типа.— М.: Наука, 1977.— 398 с.
24. —, *Сафонов М. В.* Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1980.— *44*, № 1.— С. 161—175
25. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М.: Наука, 1967.— 736 с.
26. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы).— М.: Наука, 1974.— 696 с.
27. *Маккин Г.* Стохастические интегралы.— М.: Мир,— 1972.— 184 с.
28. *Мацкявичус В.* S^p-устойчивость решений симметрических стохастических дифференциальных уравнений // Лит. мат. сб.— 1985.— *25*, № 4.— С. 72—84
29. *Мельников А. В.* О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений с негладкими коэффициентами // Теория вероятностей и ее применения.— 1979.— *24*, № 1.— С. 146—149
30. *Севастьянов Б. А.* Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложения к телефонным системам с отказами // Теория вероятностей и ее применения.— 1957.— *2*, № 1.— С. 106—116
31. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов.— Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1961. 216 с.
32. — Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами // Теория вероятностей и ее применения.— 1961.— *6*.— С. 267—298; 1962.— *7*.— С. 5—25
33. — Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений.— Киев: Наукова думка, 1987.— 327 с.
34. *Торонджадзе Т. А., Читашвили Р. Я.* Об эквивалентности сильно и слабо регулярных стохастических дифференциальных уравнений // Сообщения АН ГрССР.— 1980.— *98*, № 1.— С. 37—40
35. *Федоренко И. В.* Существование сильного решения стохастического дифференциального уравнения с непрерывным сносом / В кн.: Третий Республиканский симпозиум по дифференциальным и интегральным уравнениям (Одесса.— 1982). Тезисы докл. Одесса: ОдГУ, 1982.— С. 266—267
36. *Цирельсон Б. С.* Пример стохастического уравнения, не имеющего сильного решения // Теория вероятностей и ее применения.— 1975.— *20*, № 2.— С. 427—430

37. *Barlow M. T.* One-dimensional stochastic differential equations with no strong solutions // J. London Math. Soc. (2).— 1982.— *26,* № 2.— C. 335—347
38. *Bass R. F., Pardoux E.* Uniqueness for diffusions with piecewise constant coefficients // Probab. Theory Relat. Fields.— 1987.— *76*.— C. 557—572
39. *Chitashvili R. J., Toronjadze T. A.* On one-dimensional stochastic differential equations with unit diffusion coefficient. Structure of solutions // Stochastics.— 1981.— *4,* № 4.— C. 281—315
40. *Conway E. D.* Stochastic equations with discontinuous drift // TAMS.— 1971.— *157*.— C. 235—245
41. *Doss H.* Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires // Compt Rend Acad. Sci. Paris. Ser. A.— 1976.— *283,* № 13.—C. 939—942
42. — Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires // Ann. Inst. Henri Poincaré.— 1977.— *13,* № 2.— C. 99—125
43. *Harrison M., Reiman M.* Reflected Brownian motion in an orthant // Ann. probab.— 1981.— *9,* № 2.— C. 302—308
44. *Lebedev V. A.* On the existence of weak solutions to stochastic differential equations with driving martingales and random measures // Stochastics.— 1983.— 9.— C. 37—76
45. *Lions P. L., Sznitman A. S.* Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions // Commun. Pure and Appl. Math.— 1984.— XXXVII.— C. 511—537
46. *Manabe S., Shiga T.* On one-dimensional stochastic differential equations with non-sticky boundary conditions // J. Math. Kyoto Univ.— 1979.— *13.* № 3.— C. 595—603
47. *Mel'nikov A. V.* On properties of strong solutions of stochastic equations with respect to semimartingales // Stochastics.— 1982.— *8,* № 2.— C. 103—119
48. *Nakao S.* On the pathwise uniqueness of solutions of one-dimensional stochastic differential equations // Osaka J. Math.— 1972.— *9,* № 3.— C. 513—518
49. *Nisio M.* On the existence of solutions of stochastic differential equations // Osaka J. Math.— 1973.— *10,* № 1.— C. 185—208
50. *Stroock D. W.* Lectures on topics in stochastic differential equations.— Springer—Verlag, 1982.— 91 c.
51. —, *Varadhan S. R. S.* Multidimensional diffusion processes.— New York: Springer—Verlag, 1979.— 338 c.
52. —, — Diffusion processes with boundary conditions // Commun Pure and Appl. Math.— 1971.— *24,* № 2.— C. 147—225
53. —, — On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle // Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab. III — Berkeley: Univ. California Press, 1972.— C. 333—369
54. —, — On degenerate elliptic-parabolic operators of second order and their associated diffusions // Commun. Pure and Appl. Math.— 1972. XXV.— C. 651—714
55. *Sussman H. J.* Gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations // Ann. probab.— 1978.— *6,* № 1.— C. 19—41
56. *Tanaka H.* Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions in convex regions // Hiroshima Math. J.— 1979.— *9,* № 1.— C. 163—179
57. *Yamada T.* On a comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications // J. Math. Kyoto Univ.— 1973.— *13,* № 3.— C. 497—512
58. —, *Watanabe S.* On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, I, II // J. Math. Kyoto Univ.— 1971.— *11,* № 1.— C. 155—167; ibid.— 1971.— *11,* № 3.— C. 553—563

§ 1. Введение

1. В первые десятилетия развития теории стохастических дифференциальных уравнений Ито исследования в этой области сосредоточивались на конечномерных уравнениях с ограниченными (или локально ограниченными) коэффициентами. Однако, со временем появилась потребность существенно расширить класс изучаемых стохастнческих дифференциальных уравнений. В теории фильтрации диффузионных процессов, а также в целом ряде областей физики и техники появились стохастические уравнения с частными производными, которые, как правило, можно трактовать как стохастические дифференциальные уравнения в гильбертовом или банаховом пространстве, притом с неограниченными коэффициентами. В настоящее время теория таких уравнений создана и успешно развивается, хотя и число неисследованных задач велико.

В данном разделе дается введение в теорию стохастических эволюционных уравнений в банаховом пространстве вида

$$du(t, \omega) = A(u(t, \omega), t, \omega)\,dt + B(u(t, \omega), t, \omega)\,dW(t), \tag{2.1}$$

где $A(\cdot, t, \omega)$ и $B(\cdot, t, \omega)$ — семейства неупреждающих операторов в банаховых пространствах, $W(t)$ — процесс с независимыми приращениями и со значениями в некотором гильбертовом пространстве, ω — «случай».

Стохастические эволюционные уравнения (2.1) с ограниченными операторами B впервые рассмотрели Ю. Л. Далецкий [6] и В. В. Баклан [3], [4]. Краткий обзор работ в данной области до 1979 г. см. в обзоре Н. В. Крылова, Б. Л. Розовского [8], где обобщаются предшествующие результаты Парду [15]. Настоящее изложение следует, в основном, работам Н. В. Крылова и Б. Л. Розовского [8], Б. Л. Розовского [11].

2. Надо отметить, что, несмотря на существенное усложнение ситуации по сравнению с конечномерными «обыкновенными» стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ), многие основные идеи и методы продолжают работать и в банаховых пространствах, разумеется, с соответствующими модификациями. К ним относится, например, метод последовательных приближений. Важную роль в излагаемой теории играют условия монотонности и коэрцитивности и методы теории монотонных операторов.

По поводу сходимости дискретизованных уравнений в банаховых пространствах см. работу Л. А. Алюшиной и Н. В. Крылова [2]. Об уравнениях в банаховом пространстве по семимартингалам, связанным с задачами фильтрации, см. работы Дьендя и Н. В. Крылова [12], [13].

§ 2. Мартингалы и стохастические интегралы в гильбертовых пространствах

1. Пусть (S, Σ, μ) — полное измеримое пространство с мерой, $(X, \mathscr{X})$ — банахово пространство с борелевской σ-алгеброй, X^* — пространство, сопряженное к X.

Определение 1. *Отображение* $x: S \to X$ называется *измеримым*, если для всякого $\Gamma \in \mathscr{X}$ $\{s: x(s) \in \Gamma\} \in \Sigma$.

Отображение $x: S \to X$ называется *слабо измеримым*, если для всякого $x^* \in X^*$ отображение $xx^*: S \to E^1$ измеримо.

Отображение $x: S \to X$ называется *сильно измеримым*, если существует последовательность простых измеримых отображений, сходящаяся к x μ-почти наверное.

Если X сепарабельно, то сильная измеримость эквивалентна измеримости.

Теорема 2.1 (Петтис; см., например, [7]). Отображение $x: S \to X$ сильно измеримо тогда и только тогда, когда оно слабо измеримо и существует такое множество $B \in \Sigma$, что $\mu(B) = 0$ и множество $\{y: y = x(s),\ s \in S \setminus B\}$ сепарабельно.

В частности, если S сепарабельно, то сильная измеримость эквивалентна слабой измеримости.

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство с расширяющейся системой σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)$, $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}$, $t \geqslant 0$.

Определение 2. Случайной величиной в X называется измеримое отображение $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ в X.

Определение 3. Процесс $x(t, \omega)$, $t \geqslant 0$, со значениями в X называется $(\mathscr{F}_t)$-согласованным, если $x(t, \cdot)$ при каждом t есть измеримое отображение $(\Omega, \mathscr{F}_t, \mathbf{P})$ в X.

Определение 4. Вполне измеримыми называются подмножества в $[0, \infty) \times \Omega$, принадлежащие наименьшей σ-алгебре, относительно которой измеримы по (t, ω) все действительные, $(\mathscr{F}_t)$-согласованные, непрерывные справа и имеющие пределы слева процессы. Процесс $x: [0, \infty) \times \Omega \to X$ называется вполне измеримым, если для любого $\Gamma \in \mathscr{X}$ множество $\{(t, \omega): x(t, \omega) \in \Gamma\}$ вполне измеримо.

2. Пусть V, H — сепарабельные банаховы пространства, $V \subset H$, и оператор вложения $V \to H$ непрерывен (т. е. $\forall v \in V$ $\|v\|_H \leqslant N |v|_V$, $N > 0$).

Лемма 2.1. а) Если x — случайная величина со значениями в V (относительно борелевской σ-алгебры V), то x — случайная величина со значениями в H.

б) Если x — случайная величина со значениями в H, то $\{\omega: x(\omega) \in V\} \in \mathscr{F}$.

Дадим определение мартингала со значениями в действительном гильбертовом пространстве H и стохастического интеграла по такому мартингалу. При этом будем рассматривать только сильно (т. е. по норме) непрерывные по t мартингалы $m = m(t, \omega)$, множество всех значений которых сепарабельно.

Обозначим через H_1 замкнутую линейную оболочку множества значений $m(t, \omega)$, $t \geqslant 0$, $\omega \in \Omega$. Если $h(t, \omega) \perp H_1$, то естественно положить $\int_0^t h(s, \omega)\, dm(s, \omega) = 0$. Поэтому достаточно определить интегралы от функций со значениями в H_1. По этой причине естественно следующее предположение, действующее до конца параграфа: H — сепарабельное гильбертово пространство и H^* отождествлено с H.

При h_1, $h_2 \in H$ через $h_1 h_2$ обозначаем скалярное произведение h_1 и h_2, $|h|$ — норма $h \in H$.

Пусть G — под-σ-алгебра $\mathscr{F}$, x — случайная величина в H, и $\mathrm{E}|x| < \infty$.

Определение 5. Условным математическим ожиданием x относительно G называется такая случайная величина $\mathrm{E}(x|G)$ со значениями в H, что при любом $y \in H$

$$y\mathrm{E}(x|G) = \mathrm{E}(yx|G) \qquad \text{(п. н.)}.$$

Определенная таким образом случайная величина существует и единственна (п. н.).

Определение 6. Случайный процесс $x(t)$, $t \geqslant 0$, со значениями в H называется мартингалом относительно потока $(\mathscr{F}_t)$, если

а) x является $(\mathscr{F}_t)$ — согласованным в H,

б) $\mathrm{E}|x(t)| < \infty$, $t \geqslant 0$,

в) $\mathrm{E}(x(t)|\mathscr{F}_s) = x(s)$ п. н. при всех $0 \leqslant s \leqslant t$.

Из эквивалентности трех понятий измеримости в сепарабельном пространстве вытекает

Теорема 2.2. Случайный процесс $x(t)$, $t \geqslant 0$, со значениями в H и конечным математическим ожиданием $\mathrm{E}|x(t)| < \infty$, $t \geqslant 0$, является *мартингалом* относительно потока $(\mathscr{F}_t)$ тогда и только тогда, когда одномерным мартингалом относительно $(\mathscr{F}_t)$ является процесс $yx(t)$ при любом $y \in H$.

Определение 7. Процесс $x(t)$, $t \geqslant 0$, со значениями в H называется локальным мартингалом, если существует такая последовательность марковских моментов $\tau_n \uparrow \infty$ (п. н.), что $x(t \wedge \tau_n)$ является мартингалом при всяком n.

Класс локальных мартингалов обозначаем через $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(R_+, H)$, а последовательность (τ_n) называется локализующей. В дальнейшем будут рассматриваться только сильно непрерывные по t локальные мартингалы и мартингалы. Класс непрерывных локальных мартингалов, выходящих из нуля, обозначаем через $\mathscr{M}^c_{\mathrm{loc}}(R_+, H)$.

Теорема 2.3. Если $x \in \mathscr{M}^c_{\mathrm{loc}}(R_+, H)$, то существует такая локализующая последовательность марковских моментов (τ'_n), что $\mathrm{E}\sup\limits_{t \geqslant 0} |x(t \wedge \tau'_n)|^2 < \infty$. Если к тому же $\mathrm{E}|x(t)|^2 < \infty$ $\forall t \geqslant 0$, то $\mathrm{E}\sup\limits_{s \leqslant t} |x(s)|^2 \leqslant 4\mathrm{E}|x(t)|^2$ $\forall t \geqslant 0$.

Всюду в дальнейшем считается, что $(\tau_n') = (\tau_n)$.

Теорема 2.4. Если $x \in \mathcal{M}_{loc}^c(R_+, H)$, то $|x(t)|^2$ — локальный субмартингал.

Определение 8. Через $\langle x \rangle_t$ для $x \in \mathcal{M}_{loc}^c(R_+, H)$ обозначается возрастающий процесс (компенсатор) для $|x(t)|^2$ из разложения Дуба — Мейера.

В силу теоремы Дуба — Мейера «скобка» $\langle x \rangle_t$ определена однозначно (п. н.) и непрерывна по t.

Если $x, y \in \mathcal{M}_{loc}^c(R_+, H)$, то обозначаем $\langle x, y \rangle_t = \frac{1}{4}(\langle x+y \rangle_t - \langle x-y \rangle_t)$. Если (τ_n) — локализующая последовательность для $x(t)$ и для $y(t)$, то при $0 \leqslant s \leqslant t$

$$\mathbf{E}[(x(t \wedge \tau_n) - x(s \wedge \tau_n))(y(t \wedge \tau_n) - y(s \wedge \tau_n)) \mid \mathcal{F}_s] = \\ = \mathbf{E}[\langle x, y \rangle_{t \wedge \tau_n} - \langle x, y \rangle_{s \wedge \tau_n} \mid \mathcal{F}_s] \quad \text{п. н.}$$

Теорема 2.5 (неравенство Дэвиса). Пусть $x \in \mathcal{M}_{loc}^c(R_+, H)$, τ — марковский момент, $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$, тогда

$$\mathbf{E} \sup_{s \leqslant \tau} |x(t)| \leqslant 3\mathbf{E}[\langle x \rangle_\tau^{1/2}].$$

Зафиксируем в H ортонормированный базис $\{h_i, i \geqslant 1\}$ и положим $x^i(t) = h^i x(t)$. Известно, что почти наверное при любых i, j $d\langle x^i, x^j \rangle_t \ll d\langle x \rangle_t$.

Пусть E — некоторое сепарабельное гильбертово пространство, E^* отождествлено с E, $\{e_i, i \geqslant 1\}$ — ортонормированный базис в E, $\mathcal{L}(H, E)$ — пространство линейных непрерывных операторов из H в E, $\mathcal{L}_2(H, E)$ — подпространство $\mathcal{L}(H, E)$, состоящее из всех операторов Гильберта — Шмидта. $\mathcal{L}_2(H, E)$, является сепарабельным гильбертовым пространством с нормой

$$\|B\| = \left(\sum_i |Bh^i|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{ij} (e_j, Bh^i)^2\right)^{1/2},$$

и $\|B\|$ не зависит от выбора базисов в H, E.

Пусть Q — симметричный, неотрицательный ядерный оператор из $\mathcal{L}(H, H)$. Обозначим через $\mathcal{L}_Q(H, E)$ множество всех линейных, вообще говоря, неограниченных операторов B, определенных на $Q^{1/2}H$, переводящих $Q^{1/2}H$ в E и таких что $B^{1/2}Q \in \mathcal{L}_2(H, E)$.

При $B \in \mathcal{L}_Q(H, E)$ положим

$$|B|_Q = \|BQ^{1/2}\|.$$

Известно, что если $B \in \mathcal{L}_2(H, E)$, то

$$\|B\| \equiv |B|_{\mathcal{L}(H,E)} \leqslant \|B\|, \quad B \in \mathcal{L}_Q(H, E),$$

и

$$|B|_Q \leqslant |B| (\operatorname{tr} Q)^{1/2}.$$

Вернемся к $x \in \mathcal{M}_{loc}^c(R_+, H)$. Существует такой вполне измеримый процесс $Q_x(t)$ со значениями в $\mathcal{L}_2(H, H)$, что при всех

(t, ω) оператор $Q_x(t, \omega)$ является симметричным, неотрицательным, ядерным оператором с $\operatorname{tr} Q=1$ и

$$h^i Q_x(t) h^j = \frac{d\langle x^i, x^j\rangle_t}{d\langle x\rangle_t} \quad (d\mathbf{P}\times d\langle x\rangle.\text{—п. в.})$$

при всех i, j для всякого базиса $\{h^i\}$. Оператор Q_x называется корреляционным оператором x.

Если $B(t)$ — вполне измеримый процесс со значениями в $\mathscr{L}_2(H, E)$, и

$$\mathbf{E}\int_0^t \|B(s)\|^2 d\langle x\rangle_s < \infty$$

при всяком $t\geqslant 0$, то существует такой сильно непрерывный по t квадратично интегрируемый мартингал y_t со значениями в E, что для любого ортонормированного базиса $\{h^i\}$ и любых $y\in E$, $T\geqslant 0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\sup_{t\leqslant T}\left| y\,y(t)-\sum_{i=1}^n\int_0^t yB(s)h^i d(h^i x(s))\right|^2=0. \tag{2.1}$$

Два процесса, обладающие этим свойством, совпадают при всех t сразу (п. н.). Поэтому корректна запись

$$y(t)=\int_0^t B(s)\,dx(s) \tag{2.2}$$

и справедливо представление

$$\langle y\rangle_t=\int_0^t |B(s)|^2_{Q_x(s)} d\langle x\rangle_s, \tag{2.3}$$

что вместе с неравенством $|B|_{Q_x}\leqslant\|B\|$ (напомним, что $\operatorname{tr} Q_x=1$) дает возможность обычным образом распространить интеграл (2.2) с сохранением свойства (2.3) на все вполне измеримые функции $B(s)$, для которых при всех $t\geqslant 0$

$$\int_0^t \|B(s)\|^2 d\langle x\rangle_s<\infty \quad \text{п. н.}$$

Так определенный стохастический интеграл непрерывен по t и является локальным мартингалом. В следующей теореме понятие стохастического интеграла распространяется на еще более широкий класс процессов $B(s)$.

Теорема 2.6. Пусть при каждых (s, ω) определен оператор $B(s)=B(s, \omega)\in\mathscr{L}_{Q_x(s,\omega)}(H, E)$ такой, что процесс $B(s)Q_x^{1/2}(s)$ вполне измерим (в $\mathscr{L}_2(H, E)$) и при каждом t правая часть (2.3) конечна п. н. Тогда последовательность

$$y_n(t) \equiv \int_0^t B(s) Q_x^{1/2}(s) \left(\frac{1}{n} + Q_x^{1/2}(s)\right)^{-1} dx(s)$$

сходится равномерно по $t \leqslant T$ $(T > 0)$ по вероятности к пределу (скажем, $y(t)$). Кроме того, $y(\cdot) \in \mathcal{M}^c_{\text{loc}}(R_+, E)$, и справедливо представление (2.3).

Замечание. Приведенная конструкция следует работе Н. В. Крылова и Б. Л. Розовского [8]. Несколько иная конструкция дана Парду [15].

Процесс $y(t)$, построенный в теореме 2.6, по определению принимается равным правой части (2.2). Если X — сепарабельное гильбертово пространство и $A \in \mathcal{L}(E, X)$, то при всех $t \geqslant 0$ сразу (п. н.)

$$Ay(t) = \int_0^t AB(s)\, dx(s). \tag{2.4}$$

Пусть $e \in E$. Определим оператор $\hat{e} \in \mathcal{L}(E, R^1)$ по формуле $\hat{e}y = ey$ (скалярное произведение в E). Тогда в силу (2.4) имеем

$$ey(t) = \int_0^t \hat{e} B(s)\, dx(s).$$

Если $h(s) \in H$, $h(\cdot)$ вполне измерим, и при любом $t \geqslant 0$

$$\int_0^t |\hat{h}(s)|^2_{Q_x(s)} d\langle x \rangle_s \equiv \int_0^t |Q_x^{1/2}(s) h(s)|^2 d\langle x \rangle_s < \infty \text{ (п. н.)},$$

то имеем

$$\int_0^t \hat{h}(s)\, dx(s) := \int_0^t h(s)\, dx(s).$$

3. Введем теперь понятие винеровского процесса в H.

Определение 9. Пусть Q — ядерный, симметричный, неотрицательный оператор на H, и $\operatorname{tr} Q < \infty$. Винеровским процессом (относительно $(\mathcal{F}_t)$) в H с ковариационным оператором Q называется такой *непрерывный мартингал* $w(t)$ *со значениями в* H и корреляционным оператором $(\operatorname{tr} Q)^{-1} Q$, что $W(0) = 0$, $\langle W \rangle_t = \operatorname{tr} Q \cdot t$.

Для любого ядерного, симметричного, неотрицательного Q с $\operatorname{tr} Q > 0$ на некотором вероятностном пространстве можно построить отвечающий ему винеровский процесс. Для него $MW^2(t) = \operatorname{tr} Q \cdot t$. Стохастический интеграл по винеровскому процессу можно определить не только для вполне измеримых $B(s)$, но и для измеримых по (s, ω) и $(\mathcal{F}_s)$-согласованных $B(s)$ с $\int_0^t |B(s)|_Q^2 ds < \infty$ п. н. $(t > 0)$.

§ 3. Формула Ито для квадрата нормы

1. Пусть V — банахово пространство, V^* — сопряженное к нему, пространство, H — гильбертово пространство (все пространства — действительные). Если $v \in V$ ($h \in H$, $v^* \in V^*$), то через $|v|$ ($|h|$, $|v^*|$) будем обозначать норму v (соответственно, h, v^*) в V (в H, в V^*); если $h_1, h_2 \in H$, то $h_1 h_2$ означает скалярное произведение h_1 и h_2, и результат действия $v^* \in V^*$ на $v \in V$ обозначаем через $v^* v = v v^*$. Пусть $\Lambda : V \to H$ — линейный ограниченный оператор, причем ΛV всюду плотно в H.

Пусть $v(t, \omega) \in V$, $h(t, \omega) \in H$, $v^*(t, \omega) \in V^*$, $t \geqslant 0$, — три процесса, заданные на некотором полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ с некоторым расширяющимся потоком σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)$, $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}$, $t \geqslant 0$. Пусть $v(t, \omega)$ сильно измерим (по Лебегу) по (t, ω), слабо измерим по ω относительно $\mathscr{F}_t$ при почти всех t, при любом $v \in V$ величина $vv^*(t, \omega)$ $\mathscr{F}_t$ — измерима по ω для почти всех t и измерима относительно (t, ω). Предполагается, что $h(t, \omega)$ сильно непрерывен по t, сильно измерим относительно $\mathscr{F}_t$ при всяком t и является локальным семимартингалом, т. е. в H существуют такие непрерывные по t, сильно $\mathscr{F}_t$-измеримые процессы $A(t)$, $m(t)$, что $m(t)$ — локальный мартингал, траектории процесса $A(t)$ (при каждом ω) имеют конечную вариацию на любом конечном интервале, и $h(t) = A(t) + m(t)$.

Зафиксируем $p \in (1, \infty)$ и обозначим $q = p/(p-1)$. Предполагаем, что $|v(t)| \in L_p[0, T]$ (п. н.) при всяком $T \geqslant 0$ и существует такая измеримая по (t, ω) функция $f(t, \omega)$, что $f(t) \in Lq[0, T]$ (п. н.) при всяком $T \geqslant 0$, $|v^*(t)| \leqslant f(t)$ при всех (t, ω) (заметим, что функция $|v^*(t)|$, вообще говоря, неизмерима).

2. Следующий результат («формула Ито для квадрата нормы») является основным в данном параграфе.

Теорема 2.7. Пусть τ — марковский момент и при всяком $v \in V$ почти всюду на $\{t, \omega) : t < \tau(\omega)\}$ имеет место равенство

$$\Lambda v \Lambda v(t) = \int_0^t vv^*(s)\, ds + \Lambda v h(t). \tag{2.5}$$

Тогда существует множество $\Omega' \subseteq \Omega$ и функция $\tilde{h}(t)$ со значениями в H такие, что:

а) $\mathbf{P}(\Omega') = 1$, $\tilde{h}(t)$ сильно $\mathscr{F}_t$-измерима на множестве $\{\omega : t < \tau(\omega)\}$ при всяком t, $\tilde{h}(t)$ непрерывна по t на $[0, \tau(\omega))$ при всяком ω, $\Lambda v(t) = \tilde{h}(t)$ (п. в. $\{(t, \omega) : t < \tau(\omega)\}$);

б) при $\omega \in \Omega'$, $t < \tau(\omega)$

$$\tilde{h}^2(t) = h^2(0) + 2\int_0^t v(s)\, v^*(s)\, ds + 2\int_0^t \tilde{h}(s)\, dh(s) + \langle m \rangle_t;$$

в) если V сепарабельно, то при $\omega\in\Omega'$, $t<\tau(\omega)$, $v\in V$

$$\Lambda v\tilde{h}(t)=\int_0^t vv^*(s)\,ds+\Lambda vh(t);$$

г) если V сепарабельно и (2.5) выполнено для некоторого $t\geqslant 0$ при всяком $v\in V$ (п. н.) на $\{\omega : t<\tau(\omega)\}$, то $\Lambda v(t)=h(t)$ (п. н.) на $\{\omega : t<\tau(\omega)\}$.

Обсуждение теоремы 3.1, ее доказательство и некоторые следствия см. работы Н. В. Крылова, Б. Л. Розовского [8], Б. Л. Розовского [11]

§ 4. Стохастические дифференциальные уравнения монотонного типа в банаховых пространствах

1. Рассматривается эволюционное стохастическое уравнение

$$v(t,\omega)=u_0(\omega)+\int_0^t A(v(s,\omega),s,\omega)\,ds+$$

$$+\int_0^t B(v(s,\omega),s,\omega)\,dW(s,\omega)+z(t,\omega), \qquad (2.6)$$

на некотором полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ с возрастающим потоком полных σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)$, $t\in[0,T]$, $0<T<\infty$. Здесь считаются заданными некоторые действительные сепарабельные гильбертовы пространства H и E, отождествленные со своими сопряженными, $W(t)=W(t,\omega)$ — винеровский процесс в E с ядерным ковариационным оператором Q (см. выше), $z(t)=z(t,\omega)$ — квадратично интегрируемый непрерывный мартингал в H. Предполагается также заданным действительное сепарабельное рефлексивное банахово пространство V и сопряженное к нему V^*, причем выполнены условия:

а) $V\subseteq H\equiv H^*\subseteq V^*$,

б) V плотно в H (в норме H),

в) для всех $v\in V$ $|v|_H\leqslant c|v|_V$ $(c>0)$,

г) если $v\in V$, $v^*\in H\,(\subseteq V^*)$, то $vv^*=(v,v^*)_H$.

(Важнейший пример таких пространств H и V — это пространства $V=W_p{}^m(G)$, $p\in(1,\infty)$, и $H=L_2(G)$, где G — ограниченная область в R^d, и $dp\geqslant 2(d-mp)$.) Предполагается, что при каждых $(v,t,\omega)\in V\times[0,T]\times\Omega$ величины $A(v,t,\omega)$ и $B(v,t,\omega)$ из (2.6) есть операторы:

$$A(v,t,\omega)\in V^*,\ B(v,t,\omega)\in\mathscr{L}_Q(E,H),$$

и фиксированы числа $p\in(1,\infty)$ и $q=p/(p-1)$.

Будем предполагать также, что при каждом $v\in V$ функции $A(v,t,\omega)$, $B(v,t,\omega)$ измеримы по (t,ω) в смысле Лебега относительно меры $dt\times d\mathbf{P}$ и $(\mathscr{F}_t)$-согласованы, т. е. при каждых $v\in V$, $t\in[0,T]$ они $\mathscr{F}_t$-измеримы по ω. (Напомним, что, ввиду сепарабельности V^* и $\mathscr{L}_Q(E, H)$, понятия слабой и сильной измеримости здесь совпадают, и потому говорится просто об измеримости.) Величина u_0 из (2.6) есть $\mathscr{F}_0$-измеримая функция на Ω со значениями в H.

Определение 1. Решением, или V-решением уравнения (2.6) называется функция $v(t, \omega)$ со значениями в V, определенная на $[0, T]\times\Omega$, измеримая по (t, ω), $(\mathscr{F}_t)$-согласованная и удовлетворяющая неравенству

$$\mathbf{E}\int_0^T (|v(t)|_V^p + |v(t)|_H^2)\,dt < \infty \tag{2.7}$$

и равенству (2.6), понимаемому как равенство элементов V^* при почти всех $(t, \omega)\in[0, T]\times\Omega$.

Таким образом, решение понимается в сильном смысле. По поводу теории слабых решений см. работы Вио [16], Метивье и Вио [14].

Уравнение (2.7) рассматривается при следующих условиях: существуют такие постоянные $K, \alpha > 0$ и неотрицательная, $(\mathscr{F}_t)$-согласованная, измеримая по (t, ω) функция $f(t, \omega)$ на $[0, T]\times\Omega$, что при всех v, v_1, $v_2\in V$ и $(t, \omega)\in[0, T]\times\Omega$:

A_1) (семинепрерывность A)): функция $vA(v_1+\lambda v_2)$ непрерывна по λ на E^1;

A_2) (монотонность (A, B)):

$$2(v_1-v_2)(A(v_1)-A(v_2))+|B(v_1)-B(v_2)|_Q^2 \leqslant K|v_1-v_2|_H^2;$$

A_3) (коэрцитивность (A, B)):

$$2vA(v)+|B(v)|_Q^2+\alpha|v|^p \leqslant f+K|v|_H^2;$$

A_4) (ограниченность роста A):

$$|A(v)|_{V^*} \leqslant f^{1/q}+K|v|_V^{p-1};$$

A_5) $\mathbf{E}|u_0|_H^2 < \infty, \quad \mathbf{E}\int_0^T f(t)\,dt < \infty.$

Оказывается, что при таких условиях функции $A(v(t), t)$ и $B(v(t), t)$ измеримы по (t, ω) и $(\mathscr{F}_t)$-согласованы, и при условии, что справедливо неравенство (2.7), интегралы в (2.6) определены и конечны (см. Н. В. Крылов и Б. Л. Розовский [8], Б. Л. Розовский [11]).

Определение 2. H-решением уравнения (2.6) называется функция $u(t, \omega)$ со значениями в H, определенная на $[0, T]\times\Omega$, сильно непрерывная в H по t, $(\mathscr{F}_t)$-согласованная и такая, что

1) $u\in V$ (п. в. (t, ω)), и

$$\mathbf{E}\int_0^T (|u(t)|_V^p + |u(t)|_H^2)\,dt < \infty;$$

2) существует такое множество полной меры $\Omega' \subseteq \Omega$, на котором при всех $t \in [0, T]$

$$u(t) = u_0 + \int_0^t A(u(s), s)\, ds + \int_0^t B(u(s), s)\, dW(s) + z(t), \qquad (2.8)$$

где равенство понимается как равенство в V^*, а интегралы понимаются как

$$\int_0^t A(u(s), s)\, ds := \int_0^t I(u(s) \in V)\, A(u(s), s)\, ds,$$

$$\int_0^t B(u(s), s)\, dW(s) := \int_0^t I(u(s) \in V)\, B(u(s), s)\, dW(s),$$

где функция $I(u(s) \in V)$ $(=1$ п. в. $(t, \omega))$ измерима по (t, ω) и $(\mathcal{F}_t)$-согласована в силу леммы 2.1.

Определение 3. H-решение u называется непрерывной в H модификацией решения v, если $u(t, \omega) = v(t, \omega)$ п. в. (t, ω).

Теорема 2.8. Пусть выполнены все перечисленные выше условия. Тогда V-решение v уравнения (2.6) существует, имеет непрерывную в H модификацию, эта модификация единственна и

$$\mathbf{E} \sup_{t \leqslant T} |u(t)|_H^2 + \mathbf{E} \int_0^T |v(t)|_V^p\, dt \leqslant$$

$$\leqslant c \left(\mathbf{E} |u_0|_H^2 + \mathbf{E} \int_0^T f(t)\, dt + \mathbf{E} |\tilde{z}(T)|_H^2 \right),$$

где c зависит только от K, p, T, α.

Теорема 2.9. Пусть выполнены предположения теоремы 2.8, A и B не зависят от ω, $z(t) \equiv 0$, $v(t)$ — решение уравнения (2.6), $u(t)$ — его непрерывная в H модификация. Тогда $u(t)$ — марковская случайная функция.

Доказательство теорем 2.8 и 2.9 см. в работах Н. В. Крылова, Б. Л. Розовского [8], Б. Л. Розовского [11]. Существование V-решения доказывается с помощью перехода к пределу методом монотонности от конечномерной ситуации, для которой предварительно устанавливаются не зависящие от размерности оценки решения. Заметим, что и для конечномерного случая условия монотонности и коэрцитивности дают новый, по сравнению с «обычной» теорией, результат (ср. с § 1). Существование непрерывной в H модификации решения вытекает из теоремы 2.7. Справедлива также теорема об устойчивости решения по начальному данному.

§ 5. Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных.

I. Первая краевая задача для нелинейных уравнений параболического типа

1. Все рассмотрения этого и следующего раздела проводятся в пространствах Соболева. Пусть E^d — d-мерное евклидово пространство, G — область в E^d, Γ — граница G, m — целое число, $m \geqslant 1$, $p \in (1, \infty)$. Напомним, что пространством Соболева $W_p^m(G)$ называется пространство действительных функций на G с конечной нормой

$$\|u\|_{m,p} := \left(\sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m} \|\mathscr{D}^{\alpha_1} \ldots \mathscr{D}^{\alpha_m} u\|_p^p\right)^{1/p},$$

где $\mathscr{D}^{\alpha_1} \ldots \mathscr{D}^{\alpha_m}$ — обобщенные производные; *пространством Соболева* $\overset{\circ}{W}_p(G)$ называется замыкание $C_0^\infty(G)$ в норме $\|\cdot\|_{m,p}$.

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство с возрастающим потоком полных σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)$, $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}$, G — ограниченная область с регулярной границей (об условиях регулярности см., например, С. М. Никольский [10]), либо $G = E^d$, $p = 2$, $2(d - mp) \leqslant dp$, $z(t)$ — квадратично интегрируемый мартингал (относительно $(\mathscr{F}_t)$) со значениями в $L_2(G)$, непрерывный по t в $L_2(G)$, $W(t)$ — винеровский процесс со значениями в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве E и ковариационным оператором Q. Пространства $V = \overset{\circ}{W}{}_p^m(G)$, $H = L_2(G)$, $V^* = W_q^{-m}(G)$, $q = p/(p-1)$, удовлетворяют предположениям а)—г) § 4.

Рассмотрим в цилиндре $[0, T] \times G$ при фиксированном $T > 0$ нелинейную задачу

$$du(t, x, \omega) = -(-1)^{|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_m|} \mathscr{D}^{\alpha_1} \ldots$$

$$\ldots \mathscr{D}^{\alpha_m} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}(\mathscr{D}^{\beta_1} \ldots \mathscr{D}^{\beta_m} u(t, x, \omega), t, x, \omega)\, dt +$$

$$+ B(\mathscr{D}^{\beta_1} \ldots \mathscr{D}^{\beta_m} u(t, x, \omega), t, x, \omega)\, dW(t) + dz(t, x, \omega), \tag{2.9}$$

$$u(0, x, \omega) = u_0(x, \omega), \quad x \in G, \tag{2.10}$$

$$\mathscr{D}^{\beta_0} \ldots \mathscr{D}^{\beta_{m-1}} u|_S = 0 \tag{2.11}$$

для всех $\beta_0, \ldots, \beta_{m-1}$, таких что

$$|\beta_0| + \ldots + |\beta_{m-1}| \leqslant m - 1,$$

где S — боковая поверхность цилиндра. Как обычно, здесь предполагается суммирование по повторяющимся индексам α_i, функции A, B зависят от t, x, ω и всех производных u по x порядка до m; A, u — действительные функции, B — функция со значениями в E, во втором слагаемом BdW в (2.9) имеется в виду скалярное произведение в E.

Предполагается, что для любого набора действительных чисел $\xi=(\xi^{\beta_1,\ldots,\beta_m})$ и любого $e\in E$ функции $A(\xi, t, x, \omega)$, $B(\xi, t, x, \omega)e=$ $=(B(\xi, t, x, \omega), e)_E$ измеримы по (t, x, ω), при каждом $t\in[0, T]$ они измеримы по (x, ω) относительно произведения $\mathscr{B}^d$ (борелевской σ-алгебры в E^d) на $\mathscr{F}_t$, при каждых t, x, ω они непрерывны по ξ. Пусть еще существует постоянная $K>0$ и неотрицательная функция $f(t, x, \omega)$, обладающая теми же свойствами измеримости, что и $A(0, t, x, \omega)$, такие, что при всех t, x, ω, ξ, α_1, $\ldots$, α_m

$$|A_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(\xi, t, x, \omega)|\leqslant f^{1/q}(t, x, \omega)+ +K\sum_{\beta_1,\ldots,\beta_m}|\xi^{\beta_1,\ldots,\beta_m}|^{p-1}, \tag{2.12}$$

$$|B(\xi, t, x, \omega)|_E^2\leqslant f(t, x, \omega)+ +K\sum_{\beta_1,\ldots,\beta_m}|\xi^{\beta_1,\ldots,\beta_m}|^p+K|\xi^{0,\ldots,0}|^2. \tag{2.13}$$

Кроме того, предполагается, что $u_0(x, \omega)$ измерима относительно $\mathscr{B}^d\times\mathscr{F}_0$, и при всех t, ω $\|u_0\|_2<\infty$, $\|f(t)\|_1<\infty$,

$$\mathbf{E}\|u_0\|_2^2<\infty,\quad \mathbf{E}\int_0^T\|f(t)\|_1\,dt<\infty.$$

Эти предположения позволяют придать точный смысл уравнению (2.9) и условиям (2.10), (2.11).

Определение 1. V-решением (H-решением) задачи (2.9)—(2.11) называется V-решение (H-решение) уравнения (2.6). Аналогично определяется непрерывная в H модификация решения (2.9)—(2.11). Можно также сформулировать эквивалентное определение с помощью интегрального тождества ($(\cdot,\cdot)_0$ — скалярное произведение в $L_2(G)$)

$$(v(t), \eta)_0=(u_0, \eta)_0-\int_0^t(A_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(\mathscr{D}^{\beta_1}\ldots\mathscr{D}^{\beta_m}v, s), \mathscr{D}^{\alpha_1}\ldots\mathscr{D}^{\alpha_m}\eta)_0ds+ +\int_0^t\int_{R^d}B(\mathscr{D}^{\beta_1}\ldots\mathscr{D}^{\beta_m}v, s, x)\eta(x)\,dx\,dW(s)+(z(t), \eta)_0 \tag{2.14}$$

п. в. (t, ω) для любого $\eta\in V$.

2. Определение 2. Говорят, что уравнение (2.9) удовлетворяет условию сильной параболичности, если операторы

A, B удовлетворяют условиям (A_2), (A_3) из § 4. Следующая теорема автоматически следует из результатов § 4.

Теорема 2.10. Если уравнение (2.9) сильно параболично, то справедливы утверждения теорем 2.8 и 2.9.

В общем виде условия сильной параболичности труднопроверяемы. Все же, обобщая результаты М. И. Вишика [5], можно дать следующее простое достаточное условие для сильной параболичности уравнения (2.9), называемое алгебраическим условием сильной параболичности:

A) существуют такие постоянные N и $\varepsilon>0$, что для всех $\xi^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$, $\eta^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$, t, x, ω

$$-2A^{\beta_1\ldots\beta_m}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(\xi^{\beta_1,\ldots,\beta_m},\ t,\ x)\eta^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}\eta^{\beta_1,\ldots,\beta_m}+$$
$$+|B^{\beta_1\ldots\beta_m}(\xi^{\beta_1,\ldots,\beta_m},\ t,\ x)\eta^{\beta_1,\ldots,\beta_m}|_Q^2+$$
$$+\varepsilon\sum_{|\alpha_1|+\ldots+|\alpha_m|=m}|\xi^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}|^{p-2}|\eta^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}|^2\leqslant \tag{2.15}$$
$$\leqslant N(\eta^{0,\ldots,0})^2,$$

где

$$A^{\beta_1\ldots\beta_m}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}:=\frac{\partial}{\partial\xi^{\beta_1,\ldots,\beta_m}}A_{\alpha_1\ldots\alpha_m},$$

$$B^{\beta_1\ldots\beta_m}:=\frac{\partial}{\partial\xi^{\beta_1,\ldots,\beta_m}}B,$$

и во втором члене левой части (2.15) суммирование по $\beta_1,\ldots$, $\ldots,\beta_m$ производится до вычисления нормы $|\cdot|_Q$.

Подробнее см. Н. В. Крылов, Б. Л. Розовский [8].

§ 6. Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных.
II. Задача Коши для линейных уравнений второго порядка

1. Рассмотрим задачу (2.9) в предположении, что $m=1$, $G=$ $=E^d$, $p=2$, A, B — линейные функции ξ, вообще говоря, не равные нулю при $\xi=0$. Все предположения (2.12)—(2.13) и измеримости считаются выполненными. Задача (2.9)—(2.11) превращается тогда в следующую:

$$du(t,\ x)=\mathscr{D}^\alpha(a_{\alpha\beta}(t,\ x)\mathscr{D}^\beta u(t,\ x)+f_\alpha(t,\ x))dt+$$
$$+(b_\alpha(t,\ x)\mathscr{D}^\alpha u(t,\ x)+g(t,\ x))dW(t)+dz(t,\ x), \tag{2.16}$$

$$u(t,\ \cdot)\in L_2(E^d),\ u(0,\ x)=u_0(x),\ x\in E^d, \tag{2.17}$$

причем $a_{\alpha\beta}$, f_α — действительные функции, b_α, g — функции со значениями в E. Условия (2.12), (2.13) эквивалентны требованию ограниченности $a_{\alpha\beta}$, $|b_\alpha|_E$ и неравенству

$$\sum_\alpha \mathbf{E}\int_0^T \|f_\alpha\|_2^2\,dt+\mathbf{E}\int_0^T \||g|_E\|_2^2\,dt<\infty.$$

Решение задачи (2.16), (2.17) понимается в смысле интегрального тождества (2.14), для V-решения оно имеет место при почти всех (t, ω), для H-решения — при каждом t п. н.

Лемма 2.2. Пусть при всех x, $\eta\in E^d$, $t\in[0, T]$ справедливо неравенство

$$2\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(t, x)\eta^i\eta^j-\left|\sum_{i=1}^d b_i(t, x)\eta^i\right|_Q^2\geqslant\varepsilon|\eta|^2, \tag{2.18}$$

где $\varepsilon>0$ — постоянная, $a_{ij}=a_{\alpha\beta}$, $b_i=b_\alpha$, если α — i-й, а β — j-й координатные векторы. Тогда выполнено алгебраическое условие сильной параболичности (2.15).

Из этой леммы и результатов предыдущих разделов вытекает

Теорема 2.11. Пусть выполнено условие (2.18). Тогда существует функция $u(t, \omega)$, определенная на $[0, T]\times\Omega$ со значениями в $L_2(E^d)$, сильно непрерывная по t в $L_2(E^d)$, $(\mathscr{F}_t)$-согласованная и такая, что:

а) $u\in W_2^1(E^d)$ п. в. (t, ω),

б) для всякого $\eta\in W_2^1(E^d)$

$$\begin{aligned}(u(t), \eta)_0=(u_0, \eta)_0&+\int_0^t(-1)^\alpha(\mathscr{D}^\beta u(s), a_{\alpha\beta}\mathscr{D}^\alpha_\eta)_0\,ds+\\ &+\int_0^t(-1)^\alpha(f_\alpha(s), \mathscr{D}^\alpha_\eta)_0\,ds+\int_0^t(b_\alpha(s)\mathscr{D}^\alpha u(s)+\\ &+g(s), \eta)_0\,dW(s)+(z(t), \eta)_0\end{aligned} \tag{2.19}$$

при всех $t\in[0, T]$ сразу п. н.

Теоремы 2.8 и 2.9 позволяют доказать теоремы о единственности и о марковском свойстве функции u из теоремы 2.11. Справедлив также результат об устойчивости решения по начальным данным.

В теории фильтрации (см. Н. В. Крылов, Б. Л. Розовский [9]) важен вопрос о повышении гладкости решения задачи типа (2.16), (2.17). (Скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_0$ в уравнениях фильтрации заменяется на $(\cdot,\cdot)_m$ — скалярное произведение в $W_2^m(E^d)$.)

Далее предполагается, что $m\geqslant 0$ — целое число, $z(t)$ — квадратично интегрируемый мартингал со значениями в $W_2^m(E^d)$, непрерывный по t в $W_2^m(E^d)$ при всех t, ω, функции $a_{\alpha\beta}$ (b_α) имеют m производных (соответственно, слабых производных) по x, непрерывных (соответственно, слабо непрерывных) по x, ограниченных (соответственно, ограниченных по норме E) равномерно по t, x, ω. Пусть $g\equiv 0$ (это не умаляет общности) и при всех (t, ω) функции $f_\alpha \in W_2^m(E^d)$, $u_0 \in W_2^m(E^d)$, и

$$\mathbf{E}\, \| u_0 \|_{m,2}^2 + \mathbf{E} \int_0^T \| f_\alpha(t) \|_{m,2}^2\, dt < \infty .$$

Теорема 2.12. Пусть выполнено (2.18) и все предположения из предыдущего абзаца. Тогда существует такое множество $\Omega' \subseteq \Omega$, что $\mathbf{P}(\Omega') = 1$, и при $\omega \in \Omega'$ функция $u(t)$ из теоремы 2.11 принадлежит $W_2^m(E^d)$ и непрерывна по t в норме $W_2^m(E^d)$. Кроме того,
$u \in W_2^{m+1}(E^d)$ п. в. (t, ω), и

$$\mathbf{E} \sup_{t \leqslant T} \| u \|_{m,2}^2 + \mathbf{E} \int_0^T \| u(s) \|_{m+1,2}^2\, ds < \infty .$$

Доказательство см. Н. В. Крылов, Б. Л. Розовский [8], Б. Л. Розовский [11], а также, по поводу более общей задачи, Н. В. Крылов, Б. Л. Розовский [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анулова С. В.* О процессах с производящим оператором Леви в полупространстве // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1978.— *42*, № 4.— С. 708—750
2. *Алюшина Л. А., Крылов Н. В.* О предельном переходе в стохастических уравнениях Ито // Теория вероятностей и ее примен.— 1988.— *33*, № 1. — С. 3—13.
3. *Баклан В. В.* Проiснування роз'язкiв стохастичных рiвнянь у гiльбертовому просторi // Доповiдi АН УРСР.— 1963. № 10.— С. 1299—1303.
4. — Уравнения в вариационных производных и марковские процессы // Докл. АН СССР.— 1964.— *159*, № 4.— С. 707—710
5. *Вишик М. И.* Квазилинейные сильно-эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1963.— *233*, № 5.—С. 769—772
6. *Далецкий Ю. Л.* Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения // Успехи мат. наук.— 1967.— *22*, № 4.— С. 3—54
7. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория.— М.: изд-во. И. Л. 1962.— 896 с.
8. *Крылов Н. В., Розовский Б. Л.* Об эволюционных стохастических уравнениях // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем.— ВИНИТИ, 1979. *14*.— С. 71—146
9. —, — О задаче Коши для линейных стохастических дифференциальных уравнений с частными производными // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1977.— *41*, № 6.— С. 1329—1347
10. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1969.— 480 с.
11. *Розовский Б. Л.* Эволюционные стохастические системы.— М.: Наука, 1983.— 208 с.
12. *Gyöngy I., Krylov N. V.* On stochastic equations with respect to semimartingales. I. // Stochastics.— 1980.— *4*.— С. 1—21
13. —, — On stochastic equations with respect to semimartingales. II. // Stochastics.— 1981.— *8*.— С. 1—12

14. *Metivier M., Viot M.* On weak solutions of stochastic partial differential equations // Stochastic Anal. Proc. Japan—Fr. Semin. Paris / France.— 1987. Lect. Notes Math. 1988.— *1322*.— С. 139—150
15. *Pardoux E.* Equations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires monotones. Etude de solutions fortes de type Ito // Thése Univ. de Paris Sud.— 1975
16. *Viot M.* Solutions faibles d'équations aux dérivées partielles non linéaires // Thése Univ. Pierre et Marie Curie: Paris. 1976

III. СТОХАСТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ВАРИАЦИЙ (ИСЧИСЛЕНИЕ МАЛЛЯВЭНА). ПРИМЕНЕНИЯ К СТОХАСТИЧЕСКИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

§ 1. Введение

Стохастическое исчисление вариаций или исчисление Маллявэна в настоящее время — мощное орудие в разнообразных задачах асимптотического анализа, в теоретической физике, эргодической теории и др. Первоначально оно возникло как вероятностный подход к задачам гипоэллиптичности в теории уравнений в частных производных. Гипоэллиптичность дифференциального оператора L означает C^∞_{loc} — гладкость любой функции u, если $Lu \in C^\infty_{loc}$. Гипоэллиптичность дифференциальных операторов второго порядка исследовалась в работах Хёрмандера [16], О. А. Олейник и Е. В. Радкевича [5]. Оказалось, что гипоэллиптичность таких операторов может иметь место и при вырождении диффузии, если выполнены условия Хёрмандера на скобки Ли векторных полей, образующих матрицу диффузии. Малявэн [19], [20] предложил подход для изучения гладкости плотности решения стохастического дифференциального уравнения, не опирающийся на уравнения в частных производных, и также приводящий к условиям типа Хёрмандера. Этот подход позволяет изучать гораздо более общие задачи о гладкости распределения функционалов от винеровского процесса, процессов со скачками, с последействием, и т. д. Были предложены различные трактовки идеи Маллявэна, основанные из них — интерпретации Струка [25], Бисмута [10], и Закаи [29] (мы не претендуем на классификацию этих и других интерпретаций: см. также Шигекава [24], Ватанабэ [27], [28], Белл [8] и др.; сам Закаи свое изложение называет вариантом изложения Струка, и т. п.). В настоящей главе излагается введение в исчисление Маллявэна, в основном основанное на работе Закаи [29], посвященной сравнению вариантов Струка и Бисмута. Изложение ориентировано на приложения к решениям стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), и не содержит многих важных аспектов теории. Так мы не касаемся теории расширенных стохастических интегралов (см. Нуалар, Закаи [2], А. В. Скороход [6]), процессов со скачками (см. Бихтелер, Жакод [9], Бисмут [11] и др.), теории обобщенных броуновских функционалов (см. Ватанабэ [27], [28]), приложений к теореме об индексе (Бисмут [12]), к оператору Шрёдингера (Ватанабэ), осцилляционным интегралам (Маллявэн [20]), и многих других результатов. Не обсуждаются вопросы гладкости условных плотностей (см. Бисмут, Мишел [13]) и др. Однако излагается красивая теория Икэды — Ватанабэ — Кусуоки — Струка — Норриса об интегрируемости обратной матрицы Маллявэна в общих условиях Хёрмандера. Излагается также метод установления гладкости переходной плотности по начальным переменным, предложенный Струком и очень полезный в эргодических задачах.

§ 2. Стохастические производные

1. Пусть W_t, $0\leqslant t\leqslant T$,— винеровский процесс, H_2 — пространство квадратично интегрируемых, $\sigma(W_t : t\leqslant T)$-измеримых функционалов, $F\in H_2$. Тогда (см., например, Хида [7]) F представим в виде ряда из кратных (или повторных, см. Ито [17] и доказательство Крылова в [4]) интегралов Винера — Ито

$$F=\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^T\int_0^{t_m}\ldots\int_0^{t_k} f_m(t_1,\ldots,t_m)\,dW_{t_1}\ldots dW_{t_m}\equiv$$

$$\equiv\sum_{m=0}^{\infty}F^{(m)}(W), \tag{3.1}$$

где f_m — борелевские функции, $F^{(m)}(W)$ — обозначение m-го члена ряда, а сам ряд сходится в средне квадратичном. Определяется понятие *производной Маллявэна* $\mathscr{L}F$:

$$\mathscr{L}F:=\sum_{m=1}^{\infty}mF^{(m)}(W), \tag{3.2}$$

если ряд в (3.2) сходится в среднем квадратичном. Термин «производная» здесь можно пояснить, определив семейство функционалов ($F[\lambda]$, $|\lambda|\leqslant 1$):

$$F[\lambda]:=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m F^{(m)}(W), \tag{3.3}$$

см. Закаи [29]. Поскольку $\mathbf{E}F^{(m)}(W)F^{(n)}(W)=0$ при $m\neq n$, то ряд в (3.3) также сходится в средне квадратичном. Производную Маллявэна $\mathscr{L}F$, оказывается, можно понимать как «настоящую» производную $\partial F[\lambda]/\partial\lambda|_{\lambda=1}$, точнее, имеет место

Лемма 3.1 (Закаи [29]). Пусть $F \in H_2$. Тогда $\mathscr{L}F$ определено тогда и только тогда, когда существует предел

$$\underset{\lambda \uparrow 1}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{F - F[\lambda]}{1-\lambda},$$

и этот предел совпадает с производной Маллявэна $\mathscr{L}F$.

Предупреждение. Если функционал F задан в явном виде как функция от W, например, $F = f(W_T)$, то неверно, вообще говоря, что $F[\lambda] = f(\lambda W_T)$. В самом деле, при $f(x) = x^2$ имеем $f(\lambda W_T) = \lambda^2 W_T{}^2$, в то же время, как можно показать,

$$F[\lambda] = 2\int_0^T (\lambda W_s) d(\lambda W_s) + T = \lambda^2 W_T^2 + T(1-\lambda^2).$$

Свойства производной Маллявэна содержатся в следующей лемме.

Лемма 3.2. (Закаи [29]). Пусть F, F_1, $F_2 \in H_2$, и определены выражения $\mathscr{L}F$, $\mathscr{L}F_1$, $\mathscr{L}F_2$. Тогда:

(а) $\mathbf{E}(\mathscr{L}F) = 0$,

(б) $\mathbf{E}(F_1 \mathscr{L} F_2) = \mathbf{E}(F_2 \mathscr{L} F_1)$ — самосопряженность,

(в) $\mathbf{E}(F\mathscr{L}F) \geqslant 0$ — неотрицательность,

(г) $\mathscr{L}$ обратим с точностью до постояннной $\mathbf{E}F$,

(д) существует самосопряженный оператор $(\mathscr{L})^{1/2}$:

$$(\mathscr{L})^{1/2} F := \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m}\, F^{(m)}(W),$$

(е) $\mathscr{L}$ — замкнутый оператор.

В некоторых работах производная Маллявэна $\mathscr{L}$ определяется с точностью до знака или постоянного множителя.

2. Следующее очень важное понятие — производная по направлению. Пусть W_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, — винеровский процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, u_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, — $(\mathscr{F}_t^W)$ — согласованный, квадратично интегрируемый процесс на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. (Здесь можно, вообще говоря, не требовать квадратичной интегрируемости, и даже $\mathscr{F}_t^W$-согласованности, но об этом будет вкратце сказано ниже.) Определим семейство функционалов $(F^{\varepsilon, u}, \varepsilon \geqslant 0)$:

$$F^{\varepsilon, u} := \sum_{m=0}^{\infty} F^{(m)}\left(W + \varepsilon \int_0^{\cdot} u_s ds\right). \tag{3.4}$$

Это определение понимается в следующем смысле. Процесс $W_t + \varepsilon \int_0^t u_s ds$ в силу теоремы Гирсанова является винеровским относительно новой меры $d\mathbf{P}^{\varepsilon, u} = \rho^{\varepsilon, u} d\mathbf{P}$, где $\rho^{\varepsilon, u}$ мартингальная экспонента:

$$\rho^{\varepsilon,u}=\exp\left(-\varepsilon\int_0^T u_s dW_s-\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T |u_s|^2 ds\right).$$

Поэтому на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}^{\varepsilon,u})$ квадратично интегрируемый функционал $F^{\varepsilon,u}$ корректно определен. Отсюда следует, что $F^{\varepsilon,u}$ можно рассматривать, например, как интегрируемый функционал на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, если $\mathbf{E}(\rho^{\varepsilon,u})^2<\infty$, а в общем случае можно рассмотреть последовательность $F_N^{\varepsilon,u}\equiv(F^{\varepsilon,u}\wedge N)\vee(-N)$, $N=1, 2, \ldots$, где $F_N^{\varepsilon,u}\in H_2$ и $F_N^{\varepsilon,u}$ при $N\to\infty$ сходится поточечно к $F^{\varepsilon,u}$. Вводится понятие *производной по направлению*

$$\mathscr{D}_u F:=\partial F^{\varepsilon,u}/\partial\varepsilon\,|_{\varepsilon=0}, \tag{3.5}$$

если эта производная существует (например) в среднеквадратичном.

Далее, пусть $(h_s^i,\ 0\leqslant s\leqslant t)_{i=1}^\infty$ — ортонормированный базис в $L_2[0, T]$ из неслучайных функций. Определим квадратичную форму

$$(\mathscr{D}F, \mathscr{D}F):=\sum_{i=1}^\infty(\mathscr{D}_{h^i}F)^2, \quad F\in H_2, \tag{3.6}$$

в предположении, что ряд в (3.6) сходится в L_1. Можно доказать (Закаи [29]), что сумма ряда в (3.6) не зависит от выбора базиса $(h^i)_{i=1}^\infty$ при следующем дополнительном предположении

$$\mathbf{E}(\mathscr{D}_u F)^2\leqslant K\mathbf{E}\int_0^T u_s^2 ds \quad (K=K_F>0), \tag{3.7}$$

для любого $F\in H_2$ и любого u, для которого определена производная $\mathscr{D}_u F$; здесь $K=K_F$ не зависит от u.

По квадратичной форме $(\mathscr{D}F, \mathscr{D}F)$ обычным образом определяется *билинейная форма* $(\mathscr{D}F_1, \mathscr{D}F_2)$:

$$(\mathscr{D}F_1, \mathscr{D}F_2)=\frac{1}{4}\left((\mathscr{D}(F_1+F_2), \mathscr{D}(F_1+F_2))-\right.$$
$$\left.-(\mathscr{D}(F_1-F_2), \mathscr{D}(F_1-F_2))\right)$$

или

$$(\mathscr{D}F_1, \mathscr{D}F_2)=\sum_{i=1}^\infty(\mathscr{D}_{h^i}F_1)(\mathscr{D}_{h^i}F_2), \quad F_1, F_2\in H_2.$$

Замечание. Пусть $F\in H_2$ — таково, что определена величина $(\mathscr{D}F, \mathscr{D}F)$ и выполнено неравенство (3.7). Обозначим $\lambda_i:=\mathscr{D}_{h^i}F$. Тогда $\mathbf{E}\sum_{i=1}^\infty\lambda_i^2=\mathbf{E}(\mathscr{D}F, \mathscr{D}F)<\infty$, и, значит, $\mathbf{E}\left|\int_0^T\sum_{i=1}^\infty\lambda_i h_t^i dt\right|^2=$

$=\mathbf{E}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2<\infty$. Стало быть, определена случайная функция $\widetilde{u}_t:=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i h_t^i$, и $\mathbf{E}\int_0^T|\widetilde{u}_t|^2dt<\infty$. Можно доказать (Закаи [29]), что распределение на $C[0,T]$, порожденное процессом W_t+ $+\varepsilon\int_0^t\widetilde{u}_s ds$, $0\leqslant t\leqslant T$, абсолютно непрерывно относительно винеровской меры, поэтому определены функционалы $F^{\varepsilon,\widetilde{u}}$, и, оказывается, определена производная $\mathscr{D}_{\widetilde{u}}F$, хотя процесс $\widetilde{u}_t$, вообще говоря, не является согласованным. Условие (3.7) предполагается выполненным для всех процессов u, для которых определена величина $\mathscr{D}_uF$, в том числе и для несогласованных. С помощью условия (3.7) доказывается справедливость равенств

$$(\mathscr{D}F,\mathscr{D}F)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\mathscr{D}_{h^i}F=\mathscr{D}_{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i h^i}F=\mathscr{D}_{\widetilde{u}}F \tag{3.8}$$

(Закаи [29]). В силу (3.8) находим $\int_0^T|\widetilde{u}_t|^2dt=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2=(\mathscr{D}F,\mathscr{D}F)=$ $=\mathscr{D}_{\widetilde{u}}F$, и, стало быть, (3.8) можно переписать в виде

$$(\mathscr{D}F,\mathscr{D}F)=\frac{(\mathscr{D}_{\widetilde{u}}F)^2}{\int_0^T\widetilde{u}_t^2dt},$$

или, полагая $\hat{u}_t:=\widetilde{u}_t/\|\widetilde{u}\|_{L_2[0,T]}$, получаем

$$(\mathscr{D}F,\mathscr{D}F)=(\mathscr{D}_{\hat{u}}F)^2. \tag{3.9}$$

Таким образом, величина $(\mathscr{D}F,\mathscr{D}F)$ при условии (3.7) представима в виде квадрата производной F по некоторому случайному направлению $\hat{u}$. С другой стороны (Закаи [29]), для любого процесса u_t (не обязательно согласованного) с $\mathbf{E}\int_0^T u_s^2ds<\infty$ и такого, что при всех $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ $(\varepsilon_0>0)$ распределение W_t+ $+\varepsilon\int_0^T u_s ds$ в $C[0,T]$ абсолютно непрерывно относительно винеровской меры, и определена величина $\mathscr{D}_uF$. Обозначим класс таких процессов через $\mathfrak{M}(F)$. Справедливы соотношения $\left(\rho_i:=\right.$ $\left.=:\int_0^T u_s h_s^i ds\right)$

$$\mathscr{D}_uF=\mathscr{D}_{\sum\limits_i\rho_i h^i}F=\sum_{i=1}^{\infty}\mathscr{D}_{\rho_i h^i}F=\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i\mathscr{D}_{h^i}F. \tag{3.10}$$

Эти равенства устанавливаются теми же рассуждениями, что и (3.8). В силу (3.10) и неравенства Коши — Буняковского получаем

$$|\mathscr{D}_u F|^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\mathscr{D}_{h^j} F)^2\right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^2\right) = (\mathscr{D}F, \mathscr{D}F) \int_0^T u_s^2 ds.$$

Стало быть,

$$(\mathscr{D}F, \mathscr{D}F) \geqslant \frac{(\mathscr{D}_u F)^2}{\int_0^T u_s^2 ds}.$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3.1 (Закаи [29]). Пусть $F \in H_2$, и выполнено условие (3.7). Тогда

$$(\mathscr{D}F, \mathscr{D}F) = \sup_{\mathfrak{M}(F)} (\mathscr{D}_u F)^2.$$

Другими словами, величина $(\mathscr{D}F, \mathscr{D}F)$ является как бы квадратом градиента F по случайным направлениям.

§ 3. Правила исчисления Маллявэна

1. Основные *правила исчисления Маллявэна* следующие:

$$\mathscr{L}(F_1 F_2) = F_1 \mathscr{L} F_2 + F_2 \mathscr{L} F_1 - 2(\mathscr{D}F_1, \mathscr{D}F_2), \tag{3.11}$$

$$\mathscr{L}\varphi(F) = \varphi'(F)\mathscr{L}F - \varphi''(F)(\mathscr{D}F, \mathscr{D}F), \tag{3.12}$$

где F, F_1, $F_2 \in H_2$, $\varphi \in C_b^2$. Необходимо, однако, точнее определить область применимости этих равенств. Для этого, следуя Закаи, введем следующие определения. Пусть $\psi: E^n \to E^1$, $\psi \in C^3(E^n)$, и функция ψ вместе со всеми производными до третьего порядка включительно растет не быстрее некоторой степени от модуля аргумента. Назовем простыми функционалы вида

$$F = \psi(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}), \; 0 \leqslant t_i \leqslant T, \; 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Обозначим $K_p = \{F : \forall F_n \in H_2,\ F_n$ — простые, и $\|F - F_n\|_{L_p} + \|(\mathscr{D}F_n, \mathscr{D}F_n) - (\mathscr{D}F, \mathscr{D}F)\|_{L_p} + \|\mathscr{L}F_n - \mathscr{L}F\|_{L_p} \to 0,\ n \to \infty$. Все простые функционалы принадлежат $\bigcap_{p \geqslant 2} K_p$ (Закаи [29]), и кратные винеровские интегралы любого порядка также принадлежат $\bigcap_{p \geqslant 2} \mathbf{K}_p$ (Шигекава [24]).

Теорема 3.2 (см. Закаи [29], предложение 1.4.1.). Пусть F_1, $F_2 \in K_p$, $p \geqslant 4$. Тогда $F_1 F_2 \in K_{p/2}$ и справедливо равенство (3.11).

Доказательство. Если F_1, F_2 — простые, $F_1=\psi(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})$, $F_2=\varphi(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})$, то

$$(\mathscr{D}F_1,\mathscr{D}F_2)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^{t_i}h_s^k ds\,\psi_i'(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\int_0^{t_j}h_s^k ds\,\varphi_j'(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})\right)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{t_i}h_s^k ds\right)\left(\int_0^{t_j}h_s^k ds\right)\psi_i'(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})\right)\varphi_j'(W_{t_1},\ldots,W_{t_n}).$$

Поскольку

$$\min(t_i,t_j)=\int_0^T e_{t_i}(s)\,e_{t_j}(s)\,ds=\sum_{k=1}^{\infty}(e_{t_i},h^k)(e_{t_j},h^k),$$

где $e_t(s)=I(s\leqslant t)$, то отсюда получаем

$$(\mathscr{D}F_1,\mathscr{D}F_2)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\min(t_i,t_j)\,\psi_i'(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})\varphi_j'(W_{t_1},\ldots,W_{t_n}). \qquad (3.13)$$

Далее, установим равенство

$$\mathscr{L}\psi(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})=\sum_{i=1}^{n}W_{t_i}\psi_i'(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})-$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\min(t_i,t_j)\,\psi_{ij}''(W_{t_1},\ldots,W_{t_n}). \qquad (3.14)$$

Для этой цели удобно воспользоваться другим определением производной Маллявэна $\mathscr{L}F$, $F\in H_2$, эквивалентным исходному. Пусть $\widetilde{W}_t$, $0\leqslant t\leqslant T$, — не зависимый от W экземпляр винеровского процесса. Определим функционалы

$$\widetilde{F}^{\varepsilon}:=\sum_{m=0}^{\infty}F^{(m)}(\sqrt{1-\varepsilon}W+\sqrt{\varepsilon}\widetilde{W}),\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant 1.$$

Это определение корректно, поскольку процесс $\nu_t:=\sqrt{1-\varepsilon}W_t+\sqrt{\varepsilon}\widetilde{W}_t$ — также винеровский. Тогда, в силу равенства

$$\mathbf{E}\left(\int_0^T\int_0^{t_m}\ldots\int_0^{t_2}f_m(t_1,\ldots,t_m)\,d\nu_{t_1}\ldots d\nu_{t_m}\mid\mathscr{F}_T^W\right)=$$

$$=(1-\varepsilon)^{m/2}\int_0^T\int_0^{t_m}\ldots\int_0^{t_2}f_m(t_1,\ldots,t_m)\,dW_{t_1}\ldots dW_{t_m},$$

находим

$$\operatorname*{l.i.m}_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\tilde{F}-\mathbf{E}(\tilde{F}^{\varepsilon}\mid \mathscr{F}_T^W)}{\varepsilon}=\frac{1}{2}\mathscr{L}F. \tag{3.15}$$

Предел в левой части (3.15) для простых функционалов вычисляется при помощи формулы Ито и приводит к формуле (3.14). Аналогичное равенство справедливо и для F_2, а для произведения F_1F_2 формула (3.14) дает

$$\mathscr{L}(\psi\varphi)(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})=\sum_{i=1}^{n} W_{t_i}(\psi\varphi)'_i(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})-$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\min(t_i,t_j)(\psi\varphi)''_{ij})(W_{t_1},\ldots,W_{t_n}). \tag{3.16}$$

Из равенств (3.13), (3.16), (3.14) и аналогичного равенства для φ следует искомое соотношение (3.11) для простых функционалов. Общий случай получается переходом к пределу с помощью свойства замкнутости оператора $\mathscr{L}$. Теорема 3.2 доказана.

Аналогичным образом доказывается

Теорема 3.3 (Закаи). Пусть $F\in K_p$, $p\geqslant 4$, $\varphi\in C_b{}^2(E^1)$. Тогда $\varphi(F)\in K_p$ и справедливо равенство (3.12).

§ 4. Гладкость плотности (схема доказательства)

1. Теорема 3.4. Пусть $F\in H_2$, $A:=(\mathscr{D}F,\mathscr{D}F)$, и существуют величины $\mathscr{L}F$, A, $\mathscr{L}A$, $(\mathscr{D}A,\mathscr{D}A)$, причем $(\mathscr{D}A,\mathscr{D}A)\in L_2$, и $A\neq 0$ п. н. Тогда распределение F абсолютно непрерывно относительно меры Лебега.

Схема доказательства (Закаи [29]). Из теории преобразования Фурье вытекает, что оценка

$$|\mathbf{E}\varphi'(\xi)|\leqslant C\,\|\varphi\|_C \quad \forall\varphi\in C_b^\infty(E^1), \tag{3.17}$$

влечет наличие плотности распределения p случайной величины ξ в классе $L_2(E^1)$ (см., например, Закаи [29]). Имеем

$$(\mathscr{D}\varphi(F),\ \mathscr{D}F)=\varphi'(F)A,$$

откуда

$$\varphi'(F)=\frac{1}{2}\ \frac{-\mathscr{L}(F\varphi(F))+\varphi(F)\mathscr{L}F+F\mathscr{L}\varphi(F)}{A}.$$

Отсюда

$$2|\mathbf{E}\varphi'(F)|=|\mathbf{E}\varphi(F)(-F\mathscr{L}A^{-1}+A^{-1}\mathscr{L}F+\mathscr{L}(FA^{-1}))|\leqslant$$

$$\leqslant 2\|\varphi\|_C\mathbf{E}(|A^{-1}\mathscr{L}F|+|(\mathscr{D}F,\ \mathscr{D}A^{-1})|). \tag{3.18}$$

Если здесь математическое ожидание в правой части конечно, то получаем оценку (3.17), которая влечет абсолютную непрерывность. Если же правая часть (3.18) бесконечна, то с помощью подходящих аппроксимаций (см. Закаи [29]) можно

$\forall\varepsilon>0$ установить похожую оценку

$$|\mathbf{E}\varphi'(F)A(A+\varepsilon)^{-1}|\leqslant C_\varepsilon\|\varphi\|_C,$$

и хотя C_ε может расти при $\varepsilon\downarrow 0$, тем не менее, из этой оценки следует абсолютная непрерывность мер

$$\nu^\varepsilon(\cdot):=\mathbf{E}I(F\in\cdot)A(A+\varepsilon)^{-1},$$

и при $\varepsilon\downarrow 0$, в силу монотонной сходимости, получаем искомую абсолютную непрерывность распределения F.

Пример (Закаи [29]). Пусть $F:=\int\limits_0^T W_s W_{T-s}ds$. Тогда

$$\mathcal{D}_u F=\int\limits_0^T W_{T-s}\left(\int\limits_0^s u_r dr\right)ds+\int\limits_0^T W_s\left(\int\limits_0^{T-s} u_r dr\right)ds=$$

$$=2\int\limits_0^T W_s\left(\int\limits_0^{T-s} u_r dr\right)ds=2\int\limits_0^T u_s\left(\int\limits_0^{T-s} W_r dr\right)ds.$$

Отсюда в силу неравенства Коши — Буняковского

$$(\mathcal{D}_u F)^2\leqslant 4\left(\int\limits_0^T u_s^2 ds\right)\left(\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^{T-s} W_r dr\right)^2\right)ds,$$

и при этом

$$\sup_u\frac{(\mathcal{D}_u F)^2}{\int\limits_0^T u_s^2 ds}=4\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^{T-s} W_r dr\right)ds$$

$\left(\sup\text{ достигается на } u_t:=\int\limits_0^{T-t} W_r dr\right)$. Значит, в силу теоремы 3.1

$$(\mathcal{D}F,\mathcal{D}F)=4\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^{T-s} W_r dr\right)ds,$$

и искомая абсолютная непрерывность следует из теоремы 3.4.

Замечание. Хотя до сих пор рассматривается одномерный случай, те же методы и рассуждения позволяют изучать плотность распределения вектора $F=(F^1,\ldots,F^n)$, $F^i\in H_2$. При этом $A=(\mathcal{D}F,\mathcal{D}F)$ — матрица размера $n\times n$, называемая матрицей Маллявэна. Для того, чтобы плотность распределения p величины F не просто существовала, а была бы гладкой, $p\in C_b^\infty$, достаточно (см. Бисмут [10], Ватанабэ, Икэда [1]) выполнения неравенств

$$|\mathbf{E}\varphi^{(n)}(F)|\leqslant C_n\|\varphi\|_C,\quad n=1,2,\ldots \tag{3.19}$$

с некоторыми постоянными C_n, $\forall\varphi\in C_b^\infty$. Здесь $\varphi^{(n)}$ обозначает частную производную порядка n вдоль произвольно выбранного направления. Та же идея, которая использовалась в теореме 3.4, позволяет установить следующий важный результат (см. Ватанабэ, Икэда [1]).

Теорема 3.5 (Маллявэн). Пусть $F=(F^1, \ldots, F^n)\in H$, матрица $A=(\mathscr{D}F, \mathscr{D}F)$ определена и $\mathbf{E}\|A^{-1}\|^p<\infty$ $\forall p\geqslant 1$. Тогда распределение вектора F имеет плотность $p\in C_b^\infty(E^n)$.

§ 5. Подход Бисмута. 1.

1. Пусть $W=(W^1,\ldots,W^m)$, $F=(F^1,\ldots,F^d)^*\in H_2$. В подходе Закаи, а также Струка и самого Маллявэна важнейшую роль — при получении оценок типа (3.17) или (3.19) — играет равенство $\mathbf{E}F_1\mathscr{L}F_2=\mathbf{E}F_2\mathscr{L}F_1$, которое позволяет перебрасывать оператор дифференцирования с одного функционала на другой. Другими словами, это некая формула интегрирования по частям. В подходе Бисмута также важнейшую роль играет следующая формула интегрирования по частям:

$$\mathbf{E}\mathscr{D}_uF=\mathbf{E}F\int_0^T u_s dW_s. \tag{3.20}$$

Здесь предполагаем матричный $d\times m$ процесс u_t $\mathscr{F}_t^W$-согласованным, и $u\in H_2$. Равенство (3.20) полезно и несложно проверить прямым вычислением для функционала вида

$$F=\int_0^T\int_0^{t_m}\ldots\int_0^{t_2} f_m(t_1,\ldots,t_m)dW_{t_1}\ldots dW_{t_m}$$

и для неслучайной функции u. В общем случае доказательство (3.20) основано на формуле Гирсанова. Идея такова. Пусть $u_\cdot=(u^1_\cdot,\ldots,u^d_\cdot)^*$, где каждое u^i_t — вектор-строка размера $1\times m$, $F^{\varepsilon,u^i}:=\sum_{m=0}^\infty F^{(m)}\left(W+\varepsilon\int_0^\cdot u^i_s ds\right)$, $\rho^i(\varepsilon):=\exp\left(-\varepsilon\int_0^T u^i_s dW_s-\right.$ $\left.-\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T|u^i_s|^2ds\right)$. Тогда, в силу теоремы Гирсанова, имеет место равенство

$$\mathbf{E}F=\mathbf{E}F^{\varepsilon,u^i}\rho^i(\varepsilon). \tag{3.21}$$

Формальное дифференцирование (3.21) в точке $\varepsilon=0$ приводит к (3.20). Для строгого рассмотрения достаточно потребовать дополнительно условия

$$\mathbf{E}\exp\left(c\int_0^T\|u_s\|^2ds\right)<\infty \tag{3.22}$$

для некоторого $c>0$ (Закаи [29]).

2. Пусть $G=(G_{ij})_{i,j=1}^{d}\in H_2$ — некоторый вспомогательный матричный функционал, $\varphi\in C_b^\infty$. Тогда из (3.20) следует

$$\mathbf{E}G\varphi(F)\int_0^T u_s dW_s=\mathbf{E}\mathscr{D}_u(G\varphi(F))=\mathbf{E}\varphi(F)\mathscr{D}_u G+\mathbf{E}\varphi'(F)G\mathscr{D}_u F,$$

откуда, полагая $G:=(\mathscr{D}_u F)^{-1}$, получаем

$$|\mathbf{E}\varphi'(F)|\leqslant\|\varphi\|_C\,\mathbf{E}\left(|\mathscr{D}_u(\mathscr{D}_u F)^{-1}|+\left|(\mathscr{D}_u F)^{-1}\int_0^T u_s dW_s\right|\right). \quad (3.23)$$

Эта оценка, подобно оценке (3.18) в подходе Закаи, позволяет получить оценки вида (3.17) и установить следующие результаты, сравнимые с теоремами 3.4 и 3.5.

Теорема 3.6 (см. Закаи [29]). Пусть $F=(F^1, \ldots, F^n)^*\in H_2$, $u_t\in H_2$ — $\mathscr{F}_t^W$-согласованный процесс, при некотором $c>0$ выполнена оценка (3.22). Пусть определены величины $\mathscr{D}_u F$, $\mathscr{D}_u(\mathscr{D}_u F)$, и $\mathscr{D}_u F>0$ (матрица $\mathscr{D}_u F$ положительно определена) п. н. Тогда распределение F имеет плотность p относительно меры Лебега.

Теорема 3.7 (Бисмут). Пусть выполнены условия теоремы 3.6, и $\mathbf{E}\|(\mathscr{D}_u F)^{-1}\|^p<\infty$ $\forall p\geqslant 1$. Тогда $p\in C_b^\infty(E^n)$.

По поводу сравнения подходов Закаи (Струка) и Бисмута см. Закаи [29].

Сама идея подобного использования гирсановской замены меры предложена Хаусманом [15] в другой задаче — задаче о представлении мартингала.

§ 6. Подход Бисмута. 2. Стохастические дифференциальные уравнения

1. Рассмотрим d-мерное СДУ

$$dx_t=X_0(x_t)\,dt+\sum_{i=1}^m X_i(x_t)\circ dW_t^i,\ x_0=x, \quad (3.24)$$

или

$$dx_t=X_0(x_t)dt+X(x_t)\circ dW_t,\ x_0=x, \quad (3.25)$$

где $X_0(\cdot), \ldots, X_m(\cdot)$ — векторные поля класса $C_b^\infty(E^d)$ $X(\cdot)=(X_1(\cdot), \ldots, X_m(\cdot))$, $W=(W^1, \ldots, W^m)^*$ — m-мерный винеровский процесс, причем функции $X_0, \ldots, X_m$ и любая их производная по x ограничена; здесь $X_i\circ dW^i$ означает стохастический дифференциал Стратоновича. Эквивалентная запись (3.24) и (3.25) в форме Ито:

$$dx_t=\tilde{X}_0(x_t)dt+\sum_{i=1}^m X_i(x_t)dW_t^i,\ x_0=x,$$

или

$$dx_t = \widetilde{X}_0(x_t)\,dt + X(x_t)\,dW_t,\ x_0 = x,$$

где $\widetilde{X}_0(x) = X_0(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} X_i' X_i(x)$, т. е. $\widetilde{X}_0^k(x) = X_0^k(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{d}(\partial X_i^k/\partial x^j)\,X_i^j(x)$. Цель настоящего параграфа — показать существование гладкой плотности распределения x_t, $t>0$, при условиях типа Хёрмандера. Этот результат установлен Кусуокой и Струком (см. Струк [25], также Норрис [22], Белл [8]); в неавтономном случае аналогичный результат доказан Мишел и Шалейо — Морей с использованием техники уравнений в частных производных. Излагается схема доказательства теоремы о суммируемости обратной матрицы Маллявэна (основного технического момента), принадлежащего Норрису [22] и значительно упрощающего метод Кусуоки и Струка. Изложение ведется в рамках подхода Бисмута (на русском языке о нем можно прочитать в работах А. Ю. Веретенникова [2], [3]), хотя в данном случае подход Закаи приводит к эквивалентному результату.

Обозначим $S_1(z) = \{X_1(z), \ldots, X_m(z)\}$, $S_2(z) = \{[x_i(\cdot), X_j(\cdot)](z),\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant j \leqslant m\}, \ldots, S_{k+1}(z) = \{[L_1, L_2](z),\ L_1 \in S_k(\cdot),\ L_2 = X_j(\cdot),\ 0 \leqslant j \leqslant m\}, \ldots, \hat{S}_k(z) = \bigcup_{i=1}^{k} S_k(z)$, $\Phi_N(z) = \sum_{L_i \in \hat{S}_N(z)} (\det(L_1, \ldots, L_d))^2$, $t_0 > 0$.

Предполагается выполненным следующее условие типа Хёрмандера (H): найдется такое $N>0$, что

$$\Phi_N(x) > 0 \tag{3.26}$$

(x — начальное условие из (3.24)).

Теорема 3.8. Пусть выполнено условие (H). Тогда для любого $T>0$ величина x_t имеет плотность $p(0, x;\ t, \cdot) \in C_b^\infty$.

Предварительно установим несколько вспомогательных утверждений. Для того, чтобы воспользоваться теоремой 3.7, найдем явное выражение для матрицы $\mathscr{D}_u F$, где $F = x_t$, $t>0$, а $u_s = (u_s^{ki},\ 1 \leqslant k \leqslant d,\ 1 \leqslant i \leqslant m)$, $0 \leqslant s \leqslant T$, — $d \times m$-мерный матричный процесс. Повторяя отчасти аргументы § 4, рассмотрим матричное $(d \times m)$ СДУ

$$\begin{gathered} dx_s^{\varepsilon,u} = X_0(x_s^{\varepsilon,u})\,ds + X(x_s^{\varepsilon,u})(\circ dW_s + \varepsilon u_s ds), \\ (x_0^{\varepsilon,u})^k = x,\quad 1 \leqslant k \leqslant d, \end{gathered} \tag{3.27}$$

с $\varepsilon \in [0, 1]$. Процесс u_s предполагаем $\mathscr{F}_s^W$-согласованным и принадлежащим классу $\bigcap_{p \geqslant 1} L_p([0,\ T] \times \Omega)$, т. е. $\mathbf{E}\int_0^T \|u_s\|^p ds < \infty$

для всех $p \geqslant 1$. При таком условии можно обосновать законность дифференцирования по $\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ равенства

$$\mathbf{E}g(x_t) = \mathbf{E}g(x_t^{\varepsilon, u})^k \rho^k(\varepsilon) \quad (1 \leqslant k \leqslant d),$$

где $g \in C_b^\infty(E^d)$, $\rho^k(\varepsilon) = \exp\left(-\varepsilon \int\limits_0^T u_s^k \, dw_s - (\varepsilon^2/2) \int\limits_0^T |u_s^k|^2 \, ds\right)$, $W_s = (W_s^1, \ldots, W_s^m)^*$ (ср. с (3.21)). При этом получаем

$$\mathbf{E}\nabla g(x_t) y_t^u = \mathbf{E}g(x_t) \int\limits_0^t u_s dW_s, \tag{3.28}$$

где $y_t^u = (y_t^{u^k}) := \partial x_t^{\varepsilon, u}/\partial\varepsilon\,|_{\varepsilon=0} = (\partial x_t^{\varepsilon, u^k}/\partial\varepsilon\,|_{\varepsilon=0})$ — матрица размера $d \times d$. Процесс y_t^u удовлетворяет СДУ

$$\begin{gathered} dy_t^u = \nabla X_0(x_t) y_t^u \, dt + \nabla X(x_t) y_t^u \circ dW_t + X(x_t) u_t dt, \\ y_0^u = 0 \, (= 0_{d \times d}) \end{gathered} \tag{3.29}$$

($0_{d\times d}$ — нулевой элемент в $E^d \times E^d$). Обозначим $z_t = \partial x_t/\partial x$ (производную по начальным данным). Матричный процесс z_t удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} dz_t = \nabla X^0(x_t) z_t dt + \nabla X(x_t) z_t \circ dW_t, \\ z_0 = I_{d\times d}. \end{gathered} \tag{3.30}$$

Поэтому с помощью «вариации постоянных» получаем представление (которое можно проверить и непосредственно)

$$y_t^u = z_t \int\limits_0^t z_s^{-1} \sum_{i=1}^m X_i(x_s) u_s^i ds \tag{3.31}$$

(ср. с формулой для $(\mathscr{D}F, \mathscr{D}F)$). Здесь оптимальный в определенном смысле выбор $u_s^i = X_i^*(x_s)(z_s^{-1})^*$ (см. Бисмут [10], Закаи [29]), что согласуется с выражением для $(\mathscr{D}F, \mathscr{D}F)$. При этом выборе получаем

$$y_t^u = z_t C_t,$$

где

$$C_t = \int\limits_0^t z_s^{-1} \sum_{i=1}^m X_i(x_s) X_i^*(x_s)(z_s^{-1})^* \, ds,$$

и поскольку $\mathbf{E} \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \| z_t \|^p < \infty \ \forall p \geqslant 1$, то проверка $\mathbf{E} \| (y_t^u)^{-1} \|^p < \infty$ сводится к проверке неравенства $\mathbf{E} \| C_t^{-1} \|^p < \infty$.

Ключевую роль в доказательстве этого неравенства играет следующая

Лемма 3.3 (Кусуока и Струк). Пусть x_0, $y_0 \in R^1$, a_s, $b_s = (b_s^1, \ldots, b_s^m)$, $v_s = (v_s^1, \ldots, v_s^m)$ — $\mathscr{F}_s^W$-согласованные процессы,

$$x_t := x_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dW_s,$$

$$y_t := y_0 + \int_0^t x_s ds + \int_0^t v_s dW_s,$$

и пусть $\tau \leqslant t_0$ — марковский момент, и

$$|a_s|,\ |b_s|,\ |x_s|,\ |v_s| \leqslant C,\ s \leqslant \tau.$$

Тогда для любого $q > 17$ найдутся такие постоянные K, c, $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\mathbf{P}\left(\int_0^\tau y_t^2 dt < \varepsilon^q,\ \int_0^\tau (x_t^2 + |v_t|^2) dt \geqslant \varepsilon\right) \leqslant K \exp(-c/\varepsilon). \quad (3.32)$$

Изложим схему доказательства этой леммы, данного Норрисом. Обозначим

$$X_t := \int_0^t x_s ds, \quad M_t := \int_0^t v_s dW_s,$$

$$N_t := \int_0^t y_s v_s dW_s, \qquad Q_t := \int_0^t X_s b_s dW_s,$$

и при $\varkappa$, $\delta > 0$

$$B_1(\varkappa, \delta) := \left(\omega : \int_0^\tau y_s^2 |v_s|^2 ds < \varkappa;\ \sup_{t \leqslant \tau} |N_t| \geqslant \delta\right),$$

$$B_2(\varkappa, \delta) := \left(\omega : \int_0^\tau |v_s|^2 ds < \varkappa;\ \sup_{t \leqslant \tau} |M_t| \geqslant \delta\right),$$

$$B_3(\varkappa, \delta) := \left(\omega : \int_0^\tau X_s^2 |b_s|^2 ds < \varkappa;\ \sup_{t \leqslant \tau} |Q_t| \geqslant \delta\right).$$

При любых $\varkappa, \delta > 0$ с помощью мартингальных методов устанавливаются неравенства

$$\mathbf{P}(B_i(\varkappa, \delta)) \leqslant 2 \exp(-\delta^2/2\varkappa),\ 1 \leqslant i \leqslant 3. \quad (3.33)$$

Положим $q_1 = (q-1)/2$, $q_2 = (q-5)/8$, $q_3 = (q-9)/8$ (все $q_j > 1$), $\delta_i(\varepsilon) = \varepsilon^{q_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ (пока что ε_i еще не выбраны), и докажем, что можно выбрать такие числа $\varkappa_1(\varepsilon)$, $\varkappa_2(\varepsilon)$, $\varkappa_3(\varepsilon)$, что при некоторых $c, d > 0$ справедливы соотношения

$$\mathbf{P}(B_i) \leqslant 2 \exp(-c/\varepsilon) \quad (B_i \equiv B_i(\varkappa_i(\varepsilon), \delta_i(\varepsilon))), \quad (3.34)$$

и при $\varepsilon \in (0, d)$

$$\left(\int_0^\tau y_t^2 dt < \varepsilon^q;\ \int_0^\tau (x_t^2 + |v_t|^2) dt \geqslant \varepsilon\right) \subset \bigcup_{i=1}^3 B_i, \tag{3.35}$$

откуда и получим искомое утверждение.

Положим $\varkappa_1(\varepsilon) = C^2\varepsilon^q$ (C — из условия леммы). В силу (3.33) $\varkappa_1(\varepsilon)$ удовлетворяет (3.34) при $i=1$. Из

$$\int_0^\tau y_t^2 dt \leqslant \varepsilon^q$$

следует

$$\int_0^\tau y_t^2 |v_t|^2 dt \leqslant C^2 \varepsilon^q \equiv \varkappa_1(\varepsilon).$$

Предполагая, что $\omega \notin B_1$, получаем отсюда

$$\sup_{t \leqslant \tau} |N_t| = \sup_{t \leqslant \tau} \left| \int_0^t y_s x_s ds \right| \leqslant \delta_1(\varepsilon) = \varepsilon^{q_1},$$

а также

$$\sup_{t \leqslant \tau} \left| \int_0^\tau y_s x_s ds \right| \leqslant \left(t_0 \int_0^\tau y_s^2 x_s^2 ds \right)^{1/2} \leqslant t_0^{1/2} C \varepsilon^{q/2}.$$

Поскольку

$$y_s dy_s = y_s x_s ds + y_s v_s dw_s,$$

то, значит,

$$\sup_{t \leqslant \tau} \left| \int_0^t y_s dy_s \right| \leqslant (1 + t_0^{1/2} C \varepsilon^{1/2}) \varepsilon^{q_1}.$$

Имеем

$$y_t^2 = y_0^2 + 2 \int_0^t y_s dy_s + \int_0^t |v_s|^2 ds,$$

и, стало быть,

$$\int_0^\tau \int_0^t |v_s|^2 ds dt = \int_0^\tau y_t^2 dt - \tau y_0^2 -$$

$$-2 \int_0^\tau \left(\int_0^t y_s dy_s \right) dt \leqslant \varepsilon^q + 2t_0 (1 + t_0^{1/2} C \varepsilon^{1/2}) \varepsilon^{q_1},$$

откуда при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\tau \int_0^t |v_s|^2 ds dt \leqslant (2t_0 + 1) \varepsilon^{q_1}. \tag{3.36}$$

Из (3.36) вытекает при всех $t\in(0, \tau]$

$$t\int_0^{\tau-t}|v_s|^2ds=\int_0^t dr\int_0^{\tau-t}|v_s|^2ds\leqslant\int_0^t\int_0^{\tau-r}|v_s|^2dsdr\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^\tau\int_0^{\tau-r}|v_s|^2dsdr=\int_0^\tau\int_0^r|v_s|^2dsdr\leqslant(2t_0+1)\,\varepsilon^{q_1}.$$

Поэтому для любого $t\in(0, \tau]$

$$\int_0^\tau|v_s|^2ds\leqslant(2t_0+1)\,\varepsilon^{q_1}/t+C^2t,$$

что при $t=(2t_0+1)^{1/2}\varepsilon^{q_1/2}$ дает

$$\int_0^\tau|v_s|^2ds\leqslant\varkappa_2(\varepsilon):=(1+C^2)\,(2t_0+1)^{1/2}\varepsilon^{q_1/2}. \qquad (3.37)$$

Поскольку $q_1/2>1$, то (3.37) означает, что при достаточно малых $\varepsilon>0$ имеет место оценка

$$\mathbf{P}\left(\int_0^\tau y_t^2dt<\varepsilon^q;\ \int_0^\tau|v_s|^2ds\geqslant\varepsilon\right)\leqslant K\exp\left(-c/\varepsilon\right),$$

и, стало быть, эта часть является упрощенным вариантом основной части доказательства Ватанабэ — Икэды ([1], доказательство теоремы 5.8.2).

Пусть теперь $\omega\notin B_2$. Тогда $\sup\limits_{t\leqslant\tau}|M_t|<\delta_2\equiv\varepsilon^{q_2}$. Из $\int_0^\tau y_t^2dt<\varepsilon^q$ находим

$$\operatorname{mes}\,(t:t\in[0, \tau],\ |y_t|\geqslant\varepsilon^{q/3})\leqslant\varepsilon^{q/3},$$

и, значит,

$$\operatorname{mes}\,(t:t\in[0, T],\ |y_0+X_t|\geqslant\varepsilon^{q/3}+\varepsilon^{q_2})\leqslant\varepsilon^{q/3}.$$

Поэтому для любого $t\in[0, \tau]$ найдется такое $s\in[0, \tau]$, $|s-t|\leqslant\leqslant\varepsilon^{q/3}$, что

$$|y_0+X_s|\leqslant\varepsilon^{q/3}+\varepsilon^{q_2}$$

(здесь использована также непрерывность X_t, и знак неравенства именно нестрогий). Стало быть,

$$|y_0+X_t|\leqslant|y_0+X_s|+\int_s^t|x_r|\,dr\leqslant(1+C)\,\varepsilon^{q/3}+\varepsilon^{q_2}.$$

Поскольку при $t=0$ отсюда следует $|y_0|\leqslant(1+C)\,\varepsilon^{q/3}+\varepsilon^{q_2}$, то

$$|X_t|\leqslant2\,(1+C)\,\varepsilon^{q/3}+2\varepsilon^{q_2}\leqslant3\varepsilon^{q_2}$$

при достаточно малых $\varepsilon>0$.

В силу формулы Ито

$$\int_0^\tau x_t^2 dt = \int_0^\tau x_t dX_t = x_\tau X_\tau - \int_0^\tau X_t a_t dt - \int_0^\tau b_t dW_t. \tag{3.38}$$

Имеем ($\omega \notin B_2$)

$$|x_\tau X_\tau| \leqslant 3C\varepsilon^{q_2},$$

$$\left|\int_0^\tau X_t a_t dt\right| \leqslant 3Ct_0\varepsilon^{q_2},$$

$$\int_0^\tau |X_t|^2 |b_t|^2 dt \leqslant 9C^2 t_0 \varepsilon^{2q_2} =: \varkappa_3(\varepsilon).$$

При таком $\varkappa_3(\varepsilon)$ и при $\omega \notin B_2 \cup B_3$ получаем

$$|Q_\tau| = \left|\int_0^\tau X_t b_t dW_t\right| \leqslant \delta_3 = \varepsilon^{q_3},$$

и, стало быть, из (3.38) следует

$$\int_0^\tau x_t^2 dt \leqslant 3C(1+t_0)\varepsilon^{q_2} + \varepsilon^{q_3} \leqslant 2\varepsilon^{q_3},$$

если $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Это и доказывает «вторую часть» искомой оценки: окончательно, находим при $\omega \notin B_1 \cup B_2 \cup B_3$

$$\int_0^\tau (x_t^2 + v_t^2)\, dt \leqslant 2\varepsilon^{q_3} + \varepsilon^{q_1/2}(C^2 + 2t_0 + 1) \leqslant \varepsilon,$$

если $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Лемма 3.3 доказана.

Как уже говорилось, эта лемма является ключевым моментом доказательства теоремы, и окончание доказательства мы опускаем (его можно прочесть во многих местах, см. Струк [25], Норрис [22], Белл [8], а также формально при более жестких условиях типа Хёрмандера Икэда—Ватанабэ [1]; с учетом леммы 3.3 эти более жесткие условия можно ослабить).

§ 7. Стохастические дифференциальные уравнения (гладкость плотности по обратным переменным)

1. Струк [26] предложил прием, позволяющий устанавливать гладкость плотности распределения решения СДУ по обратным переменным. Здесь излагается не самый общий результат в этом направлении.

Теорема 3.9. Пусть выполнено условие (H) § 6. Тогда плотность $p(t, x, y)$ решения СДУ (3.24) при $t > 0$ принадлежит классу C_b^∞ по x и всякая производная $\mathcal{D}_x^\alpha p(t, x, y)$ ограничена равностепенно относительно $y \in E^d$.

Изложим схему доказательства. Пусть $U \subset E^d \times E^d$ — ограниченная область, $\operatorname{diam} U \leqslant R$, $h \in C_0^\infty (E^d \times E^d)$, $\operatorname{supp} h \subset U$. В силу теорем вложения Соболева для доказательства искомого утверждения достаточно установить оценку

$$\left| \int \left(\mathscr{D}_x^\alpha p(t, x, y) \right) h(x, y)\, dx\, dy \right| \leqslant C_{t,q,\alpha,R} \| h \|_{L_q(U)} \tag{3.39}$$

с любым мультииндексом α, любым $q > 1$, любой $h \in C_0^\infty (U)$ и постоянной $C_{t,q,\alpha,R}$. В силу коммутативности операторов интегрирования и обобщенного дифференцирования $\mathscr{D}_x^\alpha$ неравенство (3.39) эквивалентно следующему:

$$\left| \int \left(\mathscr{D}_x^\alpha \mathbf{E}\, h(z, x_t^x) \right) \Big|_{z=x} dx \right| \leqslant C_{t,q,\alpha,R} \| h \|_{L_q(U)}, \tag{3.40}$$

где x_t^x — решение СДУ (3.24). Выражение $\mathscr{D}_x^\alpha \mathbf{E}\, h(z, x_t)$ при $t > 0$ можно представить в виде

$$\mathscr{D}_x^\alpha \mathbf{E}\, h(z, x_t^x) = \mathbf{E} h(z, x_t^x)\, G_\alpha \left(\bar{x}_t^\alpha \right), \tag{3.41}$$

где $\bar{x}_t^\alpha$ — процесс в некотором расширенном фазовом пространстве (он включает, в частности, производные x_t^x по некоторым направлениям по x до порядка $|\alpha|$ включительно и обратную матрицу y_t^{-1} производных первого порядка, $- y_t = \partial x_t^x / \partial x$, — см., например, А. Ю. Веретенников [3]), суммируемый в любой степени по мере $\mathbf{P}$, а G_α — некоторая функция класса C^∞, растущая не быстрее чем степенным образом вместе с любой своей производной. В силу неравенства Гёльдера получаем

$$\begin{gathered} \left| \mathbf{E} h(x, x_t^x)\, G_\alpha \left(\bar{x}_t^\alpha \right) \right| \leqslant \\ \leqslant \left(\mathbf{E} \left| h(x, x_t^x) \right|^{\frac{q+1}{2}} \right)^{\frac{2}{q+1}} \left(\mathbf{E} \left| G_\alpha \left(\bar{x}_t^\alpha \right) \right|^{\frac{q+1}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q+1}} \leqslant \\ \leqslant C(t, q, \alpha) \left(\int \left| h(x, y) \right|^{\frac{q+1}{2}} p(t, x, y)\, dy \right)^{\frac{2}{q+1}}. \end{gathered}$$

Отсюда вновь в силу неравенства Гёльдера

$$\begin{gathered} \left| \int \left(D_x^\alpha \mathbf{E} h(z, x_t^x) \right) \Big|_{z=x} dx \right| \leqslant \\ \leqslant C(t, q, \alpha) \int \left(\int \left| h(x, y) \right|^{\frac{q+1}{2}} p(t, x, y)\, dy \right)^{\frac{2}{q+1}} dx \leqslant \\ \leqslant C(t, q, \alpha) (\operatorname{diam} U)^{\frac{q-1}{q+1}} \left(\int_U \left| h(x, y) \right|^{\frac{q+1}{2}} p(t, x, y)\, dx\, dy \right)^{\frac{2}{q+1}} \leqslant \\ \leqslant C(t, q, \alpha) (\operatorname{diam} U)^{\frac{q-1}{q+1}} \left(\int_U \left| h(x, y) \right|^q dx\, dy \right)^{1/q} \times \\ \times \left(\int_U p(t, x, y)^{\frac{q+1}{q-1}} dx\, dy \right)^{\frac{q-1}{2(q+1)^2}} \leqslant C_{t,q,\alpha,R} \| h \|_{L_q(U)}, \end{gathered}$$

что и доказывает искомую оценку (3.40), а с ней и теорему 3.9.

Замечание. Результат теоремы 3.9 оказывается полезным при изучении некоторых асимптотик, например, больших уклонений для возвратных процессов, удовлетворяющих условиям типа Хёрмандера. В этих и других предельных теоремах полезно иметь в виду также результаты I, § 5 о носителе меры диффузионного процесса в пространстве траекторий. При условии (H) носитель меры совпадает со всем пространством $C[0, \infty; E^d]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.— М.: Наука, 1986.— 445 с.
2. *Веретенников А. Ю.* Вероятностный подход к гипоэллиптичности // Успехи мат. наук.— 1983. *38*, № 3.— С. 113—125
3. — Вероятностные задачи в теории гипоэллиптичности // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1984.— *48*, № 6.— С. 1151—1170
4. —, *Крылов Н. В.* О явных формулах для решений стохастических уравнений // Мат. сб.— 1976.— *100 (142)*, № 2.— С. 266—284
5. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки. Сер. мат. анализ., — ВИНИТИ, 1971.— *22*.— 252 с.
6. *Скороход А. В.* Об одном обобщении стохастического интеграла // Теория вероятностей и ее применения.— 1975.— *20*, № 2.— С. 223—238
7. *Хида Т.* Броуновское движение.— М.: Наука, 1987.— 304 с.
8. *Bell D. R.* The Malliavin calculus.— Harlow: Longman, 1987.— 105 c.
9. *Bichteler K., Jacod J.* Calcul de Malliavin pour les diffusions avec sauts: existence d'une densité dans le cas unidimensionnele.— Lect. Notes Math.— 1984.— *986*.— 109 c.
10. *Bismut J.-M.* Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander's conditions // Z. Wahrsh.— 1981.— *56*.— C. 469—505
11. — Jump processes // In: Stochastic Analysis. Proc. Taniguchi Internat. Symposium on Stochastic Analysis (Katata and Kyoto.— 1982). Ed. by K. Itô. Amsterdam: North Holland, 1985.— C. 53—104
12. — The Atiah—Singer theorems: A probabilistic approach. I. The Index Theorem. II. The Lefschets fixed point formulas // J. Funct. Anal.— 1984.— *57*. C. 56—99. Ibid.— 1984.— *57*.— C. 329—348
13. —, *Michel D.* Diffusions conditionnelles. I. Hypoellipticité partielle. II. Générateur conditionnell. Application au filtrage // J. Funct. Anal.— 1981.— *44*.— C. 174—211. Ibid.— 1982.— *45*.— C. 274—292
14. *Gaveau B., Trauber P.* L'integrale stochastique comme opérateur de divergence dans l'espace fonctionnel // J. Funct. Anal.— 1982.— *46*.— C. 230—238
15. *Haussmann U.* Functionals of Itô processes as stochastic integrals // SIAM J. Control and Optimiz.— 1978.— *16*.— C. 252—269
16. *Hörmander L.* Hypoelliptic second order differential equations // Acta Math.— 1967.— *119*.— C. 147—171
17. *Itô K.* Multiple Wiener integrals // J. Math. Soc. Jap.— 1951.— *3*.— C. 157—169
18. *Malliavin P.* C^k-hypoellipticity with degeneracy.— Parts I, II // In: Stochastic Analysis. Ed. A. Friedman, M. Pinsky. New York: Acad. Press, 1978.— C. 199—214; 327—340
19. — Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators // Proc. Int.-Symp. on Stochast. Different. Equat. Kyoto.— 1976. Tokyo: Kinokuniya, 1978. C. 195—214

20. — On some stochastic oscillatory integrals // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. Ser. A.— 1982.— *295,* № 3.— С. 295—300
21. *Michel D.* Conditional laws and Hörmander's conditions // In: Stochastic Analysis. Proc. Taniguchi Internat. Symposium on Stochastic Analysis (Katata and Kyoto.— 1982). Ed. by K. Itô. Amsterdam: North-Holland, 1985. С. 387—408
22. *Norris N.* Simplified Malliavin calculus. Lect Notes Math.— 1986.— *1204.*— С. 101—130.
23. *Nualart D., Zakai M.* Generalized stochastic integrals and the Malliavin calculus // Probab. Theory and Relat. Fields.— 1986.— *73,* № 2.— С. 255—280
24. *Shigekawa I.* Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced measures // J. Math. Kyoto Univ.— 1980.— *20.*— С. 263—289
25. *Stroock D. W.* Some applications of stochastic calculus to partial differential equations // Lect. Notes Math.— 1983.— *976.*— С. 267—382
26. — The Malliavin calculus and its application to second order parabolic differential equations: Part I // Math. Syst. Theory.— 1981.— *14.*— С. 25—65
27. *Watanabe S.* Lectures on stochastic differential equations and Malliavin calculus // Tata Inst. of Fundamental Research. Berlin: Springer—Verlag. — 1984.— 109 с.
28. — Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculus) and its applications to heat kernels // Ann Probab.— 1987.— *15,* № 1.— С. 1—39
29. *Zakai M.* The Malliavin calculus // Acta Appl. Math.— 1985. № 3.— С. 175—207

Глава 3

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ НА ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ФИЛЬТРАЦИЯМИ

I. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Аксиоматика Колмогорова и стохастический базис

1. Аксиоматика теории вероятностей Колмогорова дает общепринятый в настоящее время подход к математическому описанию вероятностно-статистических явлений. Известно, что проблема аксиоматизации теории вероятностей формулировалась в шестой проблеме Д. Гильберта в его знаменитом докладе 8 августа 1900 года на II Международном Конгрессе математиков в Париже. Гильберт, включая (как это было принято в то время) теорию вероятностей в физику, так формулировал ([32]) 6-ую проблему «Математическое изложение аксиом физики»: «С исследованиями по основаниям геометрии близко связана задача об аксиоматическом построении по этому же образцу тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь теория вероятностей и механика.

Что касается аксиом теории вероятностей, то мне казалось бы желательным, чтобы параллельно с логическим обоснованием этой теории шло рука об руку строгое и удовлетворительное развитие метода средних значений в математической физике, в частности, в кинетической теории газов».

Различные попытки аксиоматического изложения теории вероятностей предпринимались многими авторами: С. Больман ([22], 1908 г.), С. Н. Бернштейн ([1], 1917 г.), Р. фон Мизес ([51], 1919 г.; 1928 г.), А. Ломницкий ([47], 1923). В 1929 году в работе [16] и в окончательной форме в 1933 г. в [17] А. Н. Колмогоров под влиянием общих идей теории множеств, теории меры и интегрирования, а также метрической теории функций сформулировал понятие вероятностной модели, или систему аксиом (с логической точки зрения не являющейся, вообще говоря, единственно возможной), оказавшейся при этом простой и в то же самое время столь общей, что позволила охватить не только классические разделы теории вероятностей, но и открыть путь к развитию её новых глав, в частности, теории случайных процессов.

В основе системы аксиом Колмогорова лежит понятие *вероятностного* пространства

$$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}),$$

состоящего из трех объектов, где $\Omega=\{\omega\}$ — пространство элементарных событий (исходов); $\mathscr{F}$ — совокупность подмножеств $A\subseteq\Omega$, интерпретируемых как события, образующих σ-алгебру; $\mathbf{P}$ — счетно-аддитивная неотрицательная и нормированная функция множеств, $\mathbf{P}=\mathbf{P}(A)$ $(\mathbf{P}(\sum^{\infty} A_i=\sum^{\infty}\mathbf{P}(A_i)$, если $A_i\in\mathscr{F}$ и $A_i\cap A_j=\varnothing$, $i\neq j$, $0\leqslant\mathbf{P}(\cdot)\leqslant 1$, $\mathbf{P}(\Omega)=1)$, называемая вероятностью события A.

2. В основе рассматриваемого в настоящей главе стохастического исчисления (случайных процессов) лежит понятие стохастического базиса — спецификации вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ заданием на нем неубывающего потока σ-алгебр (*фильтрации*) $\mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, $\mathscr{F}_0\subseteq\mathscr{F}_s\subseteq\mathscr{F}_t\subseteq\mathscr{F}$, $s\leqslant t$, где $\mathscr{F}_t$ интерпретируется как σ-алгебра событий, «наблюдаемых» на временном интервале $[0, t]$.

Определение. *Стохастический базис*

$$\mathscr{B}=(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0},\ \mathbf{P})$$

есть вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, наделенное фильтрацией $\mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — неубывающим семейством σ-алгебр, $\mathscr{F}_0\subseteq\mathscr{F}_s\subseteq\subseteq\mathscr{F}_t\subseteq\mathscr{F}$, являющимся непрерывным справа, т. е. $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}$, где $\mathscr{F}_{t+}=\bigcap\limits_{s>t}\mathscr{F}_s$. Стохастический базис называется полным, или удовлетворяющим обычным условиям, если σ-алгебра $\mathscr{F}$ пополнена множествами $\mathbf{P}$-меры нуль и каждая $\mathscr{F}_t$ содержит множества из $\mathscr{F}$ с $\mathbf{P}$-мерой нуль.

Наличие фильтрации (или потока σ-алгебр) $\mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ дает возможность ввести ряд новых понятий, специфических объектов, которые составили фундамент стохастического исчисления. К их числу относятся: марковские моменты, согласованные (адаптированные) процессы, опциональные и предсказуемые σ-алгебры, мартингалы и локальные мартингалы, семимартингалы и др.

§ 2. Моменты остановки, согласованные случайные процессы, опциональная и предсказуемая σ-алгебры. Классификация моментов остановки

1. Пусть $\mathscr{B}=(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ — стохастический базис.

Определение 1. *Марковским моментом*, или *моментом остановки* называется отображение $\tau:\Omega\to R_+$ такое, что при каждом $t\in R_+$

$$\{\omega:\tau(\omega)\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t.$$

С каждым моментом остановки связываются две σ-алгебры:

$$\mathscr{F}_\tau=\{A\in\mathscr{F}, \text{ такие что } A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t,\ t\in R_+\},$$

$$\mathscr{F}_{\tau-}=\sigma\{\mathscr{F}_0,\ A\cap\{t<\tau\}, \text{ где } t\in R_+ \text{ и } A\in\mathscr{F}_t\}.$$

Если $\tau\equiv t$, то $\mathscr{F}_\tau=\mathscr{F}_t$ и $\mathscr{F}_{\tau-}=\mathscr{F}_{t-}$, где

$$\mathscr{F}_{t-}=\begin{cases}\mathscr{F}_0, & \text{если } t=0\\ \bigvee\limits_{s<t}\mathscr{F}_s, & \text{если } t\in(0,\infty]\end{cases}$$

Если τ — момент остановки, то

1) $\tau+t$ — момент остановки, $t\in R_+$;
2) $\mathscr{F}_{\tau-}\subseteq\mathscr{F}_\tau$ и τ — $\mathscr{F}_{\tau-}$-измеримо;
3) если $A\in\mathscr{F}_\tau$, то

$$\tau_A(\omega)=\begin{cases}\tau(\omega), & \omega\in A\\ +\infty, & \omega\notin A\end{cases} \text{— марковский момент.}$$

Предположение о непрерывности справа семейства $\mathbf{F}$ приводит к следующему утверждению: $\tau=\tau(\omega)$ — марковский момент в том и только том случае, когда $\{\tau<t\}\in\mathscr{F}_t$ для каждого $t\in R_+$.

Если (τ_n) — последовательность моментов остановки, то $\sigma=\inf\tau_n$ и $\tau=\sup\tau_n$ — также моменты остановки и $\mathscr{F}_\sigma=\bigcap\mathscr{F}_n$.

С любыми двумя моментами остановки σ и τ связываются *стохастические интервалы*:

$$[\sigma,\tau]=\{(\omega,t):t\in R_+,\ \sigma(\omega)\leqslant t\leqslant\tau(\omega)\},$$
$$[\sigma,\tau[=\{(\omega,t):t\in R_+,\ \sigma(\omega)\leqslant t<\tau(\omega)\},$$
$$]\sigma,\tau]=\{(\omega,t):t\in R_+,\ \sigma(\omega)<t\leqslant\tau(\omega)\},$$
$$]\sigma,\tau[=\{(\omega,t):t\in R_+,\ \sigma(\omega)<t<\tau(\omega)\}.$$

Множество $[\tau]=[\tau, \tau]$ называется *графиком* момента остановки τ.

Определение 2. *Случайный процесс* — это семейство $X=(X_t(\omega))_{t\in R_+}$ отображений Ω в множество R (если вместо R берется некоторое множество E, то говорят, что X есть E-значный случайный процесс). Для фиксированного $\omega\in\Omega$ отображение $t\to X_t(\omega)$ называется траекторией, или выборочной функцией процесса X. Случайный процесс X, заданный на стохастическом базисе $\mathscr{B}=(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ называется согласованным ($\mathbf{F}$-согласованным), или адаптированным ($\mathbf{F}$-адаптированным), если X_t являются $\mathscr{F}_t$-измеримыми при каждом $t\geqslant 0$.

Примеры марковских моментов:

a) Пусть $X=(X_t(\omega))_{t\in R_+}$ — непрерывный справа согласованный случайный процесс и B — открытое множество в R. Тогда

$$\tau=\inf(t : X_t\in B)$$

является марковским моментом.

b) Если X — адаптированный непрерывный справа процесс с неубывающими траекториями и $a\in\bar{R}$, то момент

$$\tau=\inf(t : X_t\geqslant a)$$

является марковским.

2. В общей теории случайных процессов важную роль играют опциональные и предсказуемые σ-алгебры подмножеств пространства $\Omega\times R_+=\{(\omega, t) : \omega\in\Omega, t\in R_+\}$.

Определение 3. *Опциональная* σ-алгебра $\mathscr{O}$ подмножеств $\Omega\times R_+$ есть σ-алгебра, порожденная всеми согласованными процессами $Y=Y(t, \omega)$, $t\in R_+$, $\omega\in\Omega$, рассматриваемыми как отображения $Y: (\omega, t)\to R$, траектории которых принадлежат пространству $\mathbf{D}$ (непрерывных справа и имеющих пределы слева функций).

Показывается, что опциональная σ-алгебра $\mathscr{O}$ может быть также определена и как σ-алгебра, порожденная всеми стохастическими интервалами $[0, \tau[$, где τ — марковские моменты.

Определение 4. *Предсказуемая* σ-алгебра $\mathscr{P}$ подмножеств $\Omega\times R_+$ есть σ-алгебра, порожденная всеми согласованными процессами $Y=Y(\omega, t)$, $t\in R_+$, $\omega\in\Omega$, траектории которых непрерывны слева.

Предсказуемая σ-алгебра $\mathscr{P}$ порождается также любой из совокупностей множеств:

a) $A\times\{0\}, A\in\mathscr{F}_0$ и $[0, \tau]$, где τ — моменты остановки;

b) $A\times\{0\}$, $A\in\mathscr{F}_0$ и $A\times]s, t]$, где $s<t$ и $A\in\mathscr{F}_s$. Ясно, что $\mathscr{P}\subseteq\mathscr{O}$.

$\mathscr{O}$-измеримый или $\mathscr{P}$-измеримый случайный процесс называется соответственно *опциональным* или *предсказуемым*.

Роль опциональных и предсказуемых множеств и процессов особо проявляется в (приводимой ниже) конструкции стохастических интегралов, представляющих собой существенный ингредиент теории стохастического исчисления.

3. Определение 5. Марковский момент τ называется *предсказуемым*, если стохастический интервал $[0, \tau[$ является предсказуемым множеством.

Это определение равносильно тому, что существует неубывающая последовательность марковских моментов $(\tau_n)_{n\geq 1}$ такая, что

$$\tau(\omega) = \lim \tau_n(\omega)$$

и $\tau_n(\omega) < \tau(\omega)$, $\omega \in \{\omega : \tau(\omega) > 0\}$. (Такая последовательность (τ_n) называется *предвещающей* последовательностью для τ).

Отметим ряд свойств предсказуемых моментов:

a) если (τ_n) — предсказуемые моменты, то $\sup \tau_n$ также предсказуемый момент;

b) если (τ_n) — предсказуемые моменты и $\sigma = \inf \tau_n$, причем $\bigcup\{\sigma = \tau_n\} = \Omega$, то σ — также предсказуемый момент;

c) если τ — предсказуемый момент и $A = \mathscr{F}_{\tau-}$, то момент $\tau_A(\omega) = \begin{cases} \tau(\omega), & \omega \in A, \\ +\infty, & \omega \notin A \end{cases}$ также является предсказуемым.

d) если τ — момент остановки является дебютом предсказуемого множества A, т. е. $\tau(\omega) = \inf\{t : (t, \omega) \in A\}$ и $[\tau] \subseteq A$, то τ — предсказуемый момент.

Важным и трудным результатом общей теории случайных процессов является следующая

Теорема 3.1 (о сечениях). Пусть стохастический базис $\mathscr{B}$ является полным и $A \in \mathscr{P}$ (соответственно, $A \in \mathscr{O}$). Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует предсказуемый (соответственно, марковский) момент τ такой, что его график $[\tau]$ принадлежит множеству A и

$$\mathbf{P}(\omega : \tau(\omega) = \infty \text{ и есуществует } t \in R_+ \text{ с } (\omega, t) \in A) \leq \varepsilon.$$

Типичным примером применения этой теоремы, являющейся основным средством в доказательствах результатов о «единственности», является

Теорема 3.2. Пусть X и Y предсказуемые (опциональные) процессы. Пусть для каждого предсказуемого (марковского) момента τ

$$X_\tau = Y_\tau (\{\tau < \infty\}; \mathbf{P} \text{ — п. н.}),$$

т. е. $\mathbf{P}(X_\tau \neq Y_\tau, \tau < \infty) = 0$. Тогда процессы X и Y *неразличимы*, иначе говоря случайное множество $\{X \neq Y\} = \{(\omega, t) : X_t(\omega) \neq \neq Y_t(\omega)\}$ является пренебрежимым, т. е. $\mathbf{P}(\omega : \exists t \in R_+$ с $(\omega, t) \in \{X \neq Y\}) = 0$.

4. С целью проведения классификации марковских моментов введем следующие два понятия.

Определение 6. Марковский момент τ называется *достижимым*, если найдется последовательность $(\tau_n)_{n\geq 1}$ предсказуемых моментов таких, что $[\tau] \subseteq \bigcup\limits_n [\tau_n]$.

Определение 7. Марковский момент σ называется *вполне недостижимым,* если $\mathbf{P}(\sigma=\tau<\infty)=0$ для всякого предсказуемого момента τ.

Теорема 3.3. Для каждого момента τ существует одна и только одна (с точностью до $\mathbf{P}$-пренебрежимости) пара марковских моментов σ и γ таких, что:

(1) σ — достижимый момент,

(2) γ — вполне недостижимый,

(3) $[\tau]=[\sigma]\cup[\gamma]$ и $[\sigma]\cap[\gamma]=\varnothing$.

В смысле, указанном в этой теореме, можно сказать, что классы предсказуемых и вполне недостижимых моментов являются «ортогональными».

Если случайный процесс X из класса $\mathbf{D}$ является предсказуемым, то существует последовательность предсказуемых моментов, которая исчерпывает все множество моментов скачков. При этом $\Delta X_\tau=0$ ($\{\tau<\infty\}$; $\mathbf{P}$ — п. н.) для всех вполне недостижимых моментов ($\Delta X_\tau=X_\tau-X_{\tau-}$).

Определение 8. Если для процесса X из класса $\mathbf{D}$ $\Delta X_\sigma=0$ ($\{\sigma<\infty\}$; $\mathbf{P}$ — п. н.) для каждого предсказуемого момента σ, то говорят, что процесс X является *квазинепрерывным слева.*

Теорема 3.4. Пусть процесс X принадлежит классу $\mathbf{D}$. Тогда следующие три условия являются эквивалентными:

a) X — квазинепрерывен слева;

b) существует последовательность вполне недостижимых моментов, которая исчерпывает все множество скачков процесса;

c) для каждой возрастающей последовательности $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ с пределом τ $(\tau=\lim\tau_n)$

$$\lim X_{\tau_n}=X_\tau \quad (\{\tau<\infty\};\ \mathbf{P}\text{— п. н.}).$$

5. Предположим, что случайный процесс $X=(X_t)_{t\in R_+}$ является $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(R_+)$-измеримым. Ясно, что $\mathscr{P}\subseteq\mathscr{O}\subseteq\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(R_+)$. Оказывается, что при естественных предположениях (типа $X\geqslant 0$, $|X|\leqslant C$), обеспечивающих существование условных математических ожиданий, существует один и только один (с точностью до неразличимости) опциональный процесс ${}^oX$ (предсказуемый процесс ${}^pX$) такой, что

$$({}^oX)_\tau=\mathsf{E}(X_\tau|\mathscr{F}_\tau) \quad (\{\tau<\infty\};\ \mathbf{P}\text{— п. н.})$$

для всякого марковского момента τ (соответственно

$$({}^pX)_\sigma=\mathsf{E}(X_\sigma|\mathscr{F}_{\sigma-}) \quad (\{\sigma<\infty\};\ \mathbf{P}\text{— п. н.})$$

для всякого предсказуемого момента σ).

Процессы ${}^oX$ и ${}^pX$ называются *опциональной* и *предсказуемой проекциями* процесса X.

Если X — квазинепрерывный слева процесс, то исходя из определения 8 следует, что ${}^pX=X_-$.

§ 3. Мартингалы и локальные мартингалы

1. Определение 1. Согласованный процесс $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$, определенный на стохастическом базисе $\mathscr{B}=(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ и с траекториями из пространства $\mathbf{D}$, называется *мартингалом* (*субмартингалом, супермартингалом*), если $\mathbf{E}|X_t|<\infty$, $t\in R_+$,

$$X_s=\mathbf{E}(X_t|\mathscr{F}_s)\ (X_s\leqslant\mathbf{E}(X_t|\mathscr{F}_s),\ X_s\geqslant\mathbf{E}(X_t|\mathscr{F}_s)),\ s\leqslant t,\ \mathbf{P}-\text{п. н.}$$

Ряд нижеследующих фундаментальных свойств введенных процессов был дан, в основном, Дж. Дубом.

Теорема 3.5. Пусть X — супермартингал такой, что существует интегрируемая случайная величина Y с $X_t\geqslant\mathbf{E}(Y|\mathscr{F}_t)$, $t\in R_+$. Тогда

a) $X_t\to X_\infty$ ($\mathbf{P}$ — п. н.), где X_∞ — некоторая (конечная) случайная величина (называемая *терминальной*);

b) если σ и τ — два марковских момента, то случайные величины X_σ и X_τ интегрируемы и

$$X_\sigma\geqslant\mathbf{E}(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)$$

на множестве $\{\sigma\leqslant\tau\}$. В частности, «остановленный» процесс $X^\tau=(X_{t\wedge\tau})_{t\geqslant 0}$ снова является супермартингалом.

Класс всех мартингалов, заданных на стохастическом базисе $\mathscr{B}$ будем обозначать $\overline{\mathscr{M}}(\mathscr{B})$ или $\overline{\mathscr{M}}$. Через $\mathscr{M}$ обозначим подкласс $\overline{\mathscr{M}}$, состоящий из равномерно интегрируемых мартингалов X, т. е. мартингалов, для которых семейство случайных величин $(X_t)_{t\in R_+}$ является равномерно интегрируемым:

$$\sup_{t\in R_+}\mathbf{E}(|X_t|\,I(|X_t|>N))\to 0,\quad N\to\infty.$$

Теорема 3.6. 1) Если $X\in\mathscr{M}$, то существует такая интегрируемая случайная величина X_∞, что

$$X_t\to X_\infty\quad (\mathbf{P}-\text{п. н.}),\quad t\to\infty,$$

$$X_t=\mathbf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_t),\quad t\geqslant 0,\quad (\mathbf{P}-\text{п. н.})$$

$$\mathbf{E}\,|X_t-X_\infty|\to 0,\quad t\to\infty,$$

$$X_{\tau\wedge\sigma}=\mathbf{E}(X_\sigma|\mathscr{F}_\tau)\quad (\mathbf{P}-\text{п. н.})$$

для любых марковских моментов τ и σ, процесс $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant\infty}$ является мартингалом.

2) Если Y — интегрируемая случайная величина, то существует один и только один мартингал $X\in\mathscr{M}$ такой, что

$$X_t=\mathbf{E}(Y|\mathscr{F}_t),\quad t\geqslant 0\quad (\mathbf{P}-\text{п. н.}).$$

3) Если $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ — возрастающая последовательность марковских моментов, то

$$\lim_n X_{\tau_n}=\mathbf{E}\{X_{\lim\tau_n}|\vee\mathscr{F}_{\tau_n}\}\quad (\mathbf{P}-\text{п. н.}).$$

В частности, если τ — предсказуемый момент, то

$$X_{\tau-}=\mathbf{E}(X_\tau|\mathcal{F}_{\tau-}) \qquad (\mathbf{P}\text{ — п. н.})$$

4) Каждый равномерно интегрируемый мартингал X принадлежит классу D, т. е. семейство случайных величин $\{X_\tau : \tau$ — конечнозначные марковские моменты$\}$ является равномерно интегрируемым.

В общей теории случайных процессов важную роль играет класс $\mathcal{H}^2$ квадратично интегрируемых мартингалов, т. е. таких, что

$$\sup_{t\geq 0} \mathbf{E} X_t^2 < \infty .$$

Ясно, что $\mathcal{H}^2 \subseteq \mathcal{M}$. Мартингал $X \in \mathcal{H}^2$ тогда и только тогда, когда «терминальная» величина X_∞ из теоремы 3.6 является квадратично интегрируемой. В этом случае $\mathbf{E}|X_t - X_\infty|^2 \to 0$, $t\to\infty$.

Если $X\in\mathcal{H}^2$, то имеет место неравенство (Колмогоров, Дуб)

$$\mathbf{E}\left(\sup_{t\in R_+} X_t^2\right) \leqslant 4 \sup_{t\in R_+} \mathbf{E} X_t^2 = 4\mathbf{E} X_\infty^2.$$

Интересная и полезная характеризация класса равномерно интегрируемых мартингалов дается следующей теоремой.

Теорема 3.7. Пусть X — согласованный процесс класса $\mathbf{D}$ с терминальной величиной X_∞ (т. е. X_∞ есть предел $\lim_{t\to\infty} X_t$ ($\mathbf{P}$ — п. н.)) Тогда X — равномерно интегрируемый мартингал тогда и только тогда, когда для всякого марковского момента τ величина X_τ интегрируема и $\mathbf{E}X_\tau = \mathbf{E}X_0$.

2. Введению понятия «локальный мартингал» предпошлем следующее

Определение 2. Пусть $\mathcal{G}$ — некоторый класс случайных процессов. Мы говорим, что процесс X принадлежит классу $\mathcal{G}_{\text{loc}}$, если и только если существует такая неубывающая последовательность марковских моментов $(\tau_n)_{n\geq 1}$ (зависящая, вообще говоря, от X), что $\lim \tau_n = \infty$ и каждый остановленный процесс $X^{\tau_n} \in \mathcal{G}$. Последовательность $(\tau_n)_{n\geq 1}$ в этом случае называется *локализующей* для процесса X.

Отправляясь от этого определения и классов $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}^2$ вводятся классы $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ и $\mathcal{H}^2_{\text{loc}}$ — классы локальных мартингалов и локально квадратично интегрируемых мартингалов. Ясно, что

$$\mathcal{M} \subseteq \bar{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}_{\text{loc}}, \quad \mathcal{H}^2 \subseteq \mathcal{H}^2_{\text{loc}}.$$

В случае дискретного времени и очевидным образом определяемого «дискретного» стохастического базиса $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbf{P})$ можно дать следующую характеризацию класса локальных мартингалов

Теорема 3.8. Пусть $X = (X_n)_{n\geq 0}$ — согласованный процесс. Тогда X — локальный мартингал в том и только том случае, когда

a) $\mathbf{E}|X_0|<\infty$,

b) $\mathbf{E}(|X_n||\mathcal{F}_{n-1})<\infty$ ($\mathbf{P}$-п. н.), $n\geqslant 1$,

c) $\mathbf{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1})=X_{n-1}$ ($\mathbf{P}$-п. н.), $n\geqslant 1$.

(Здесь $\mathbf{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1})$ есть «расширенное» условное математическое ожидание, определяемое не только в предположении $\mathbf{E}|X_n|<\infty$, а лишь в предположении, что $\mathbf{E}(|X_n||\mathcal{F}_{n-1})<<\infty$ ($\mathbf{P}$ — п. н.).)

§ 4. Возрастающие процессы. Разложение Дуба — Мейера. Компенсаторы

1. Наряду с мартингалами и локальными мартингалами существенную роль в общей теории случайных процессов играет понятие «возрастающий процесс».

Определение 1. Согласованный процесс $A=(A_t)_{t\geqslant 0}$ класса $\mathbf{D}$ с $A_0=0$ называется *возрастающим* процессом, если каждая траектория $t\longrightarrow A_t(\omega)$ является неубывающей функцией. Класс возрастающих процессов обозначается $\mathcal{V}^+$.

Через $\mathcal{V}$ обозначим класс $\mathcal{V}^+\ominus\mathcal{V}^+$, т. е. класс всех согласованных процессов с траекториями из $\mathbf{D}$, имеющих конечную вариацию (на каждом интервале $[0, t]$, $t\in R_+$).

Если $A\in\mathcal{V}$ и H — опциональный процесс (значит, $t\to H_t(\omega)$ есть борелевская функция для каждого ω), то можно определить («интегральный») процесс $H\circ A$, или $\int_0^{\cdot} H_s dA_s$, полагая

$$(H\circ A)_t(\omega)=\begin{cases}\int_0^t H_s(\omega)\,dA_s(\omega), & \text{если } \int_0^t |H_s(\omega)|\,d\,[\mathrm{Var}\,A]_s(\omega)<\infty,\\ \infty, & \text{в других случаях,}\end{cases}$$

где все рассматриваемые интегралы понимаются как интегралы Лебега-Стилтьеса.

Если $A\in\mathcal{V}$ и H — опциональный процесс, то $B=H\circ A$ является опциональным процессом. Если к тому же A и H — предсказуемы, то таким же является и процесс B.

В классе $\mathcal{V}^+$ (соответственно $\mathcal{V}$) выделим подкласс $\mathcal{A}^+$ (соответственно $\mathcal{A}$) процессов, для которых $\mathbf{E}A_\infty<\infty$ (соответственно $\mathbf{E}[\mathrm{Var}\,A]_\infty<\infty$). Ясно, что $\mathcal{A}=\mathcal{A}^+\ominus\mathcal{A}^+$.

Используя введенную выше процедуру локализации, можно ввести классы $\mathcal{V}^+_{\mathrm{loc}}$, $\mathcal{V}_{\mathrm{loc}}$, $\mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$ и $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$.

В следующей теореме собран ряд свойств введенных процессов.

Теорема 3.9. 1) Если A предсказуемый процесс класса $\mathcal{V}$, то существует локализующая последовательность $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ марковских моментов таких, что $[\mathrm{Var}\, A]_{\sigma_n} \leqslant n$ (**P**-п. н.) и, в частности, $A \in \mathscr{A}_{loc}$.

2) Если локальный мартингал X принадлежит классу $\mathscr{V}$, то $X \in \mathscr{A}_{loc}$.

3) Если $A \in \mathscr{A}$, M — ограниченный мартингал и τ — момент остановки, то

$$\mathbf{E}(M \circ A)_\tau = \mathbf{E}(M_\tau A_\tau).$$

Если к тому же A — предсказуемый процесс, то

$$\mathbf{E}(M_- \circ A)_\tau = \mathbf{E}(M_\tau A_\tau).$$

4) Если $A \in \mathscr{A}_{loc}$ и M — локальный мартингал, являющийся локально ограниченным, то $MA - M \circ A \in \mathscr{M}_{loc}$. Если к тому же A — предсказуемый процесс, то процесс $MA - M_- \circ A \in \mathscr{M}_{loc}$.

2. Приводимый далее результат, известный как «разложение Дуба—Мейера», играет ключевую роль во всем стохастическом исчислении.

Теорема 3.10. Если X — субмартингал класса D (т. е. семейство (X_τ), где τ — конечно-значные марковские моменты, равномерно интегрируемое), то существует единственный (с точностью до неразличимости) возрастающий интегрируемый предсказуемый процесс A с $A_0 = 0$ такой, что $m = X - A$ — равномерно интегрируемый мартингал.

Важным следствием «разложения Дуба—Мейера» является

Теорема 3.11. Пусть $A \in \mathscr{A}^+_{loc}$. Тогда существует предсказуемый процесс $A^p \in \mathscr{A}^+_{loc}$ такой, что выполнено любое из следующих равносильных утверждений:

a) $A - A^p \in \mathscr{M}_{loc}$;

b) $\mathbf{E}A_\tau{}^p = \mathbf{E}A_\tau$ для всех моментов остановки τ;

c) $\mathbf{E}[(H \circ A^p)_\infty] = \mathbf{E}[(H \circ A)_\infty]$ для всех неотрицательных предсказуемых процессов H.

Процесс A^p называется *компенсатором* процесса A. (Иногда называют «*предсказуемым компенсатором*», или «*дуально предсказуемой проекцией*» процесса A.)

Теорема 3.11 допускает очевидное обобщение и на случай процессов $A \in \mathscr{A}_{loc}$, для которых соответствующий предсказуемый процесс $A^p \in \mathscr{A}_{loc}$ (такой, что $A - A^p \in \mathscr{M}_{loc}$) также называется компенсатором процесса A.

Отметим ряд простых свойств компенсаторов.

Теорема 3.12. 1) Если процесс $A \in \mathscr{A}_{loc}$ и предсказуем, то $A^p = A$.

2) Если $A \in \mathscr{A}_{loc}$ и τ — момент остановки, то $(A^\tau)^p = (A^p)^\tau$.

3) Если $A \in \mathscr{A}_{loc}$, то предсказуемая проекция ${}^p(\Delta A) = \Delta(A^p)$.

4) Если $A \in \mathscr{A}_{loc}$, то A есть локальный мартингал в том и только том случае, когда $A^p = 0$.

5) Если $A \in \mathscr{M}_{loc} \cap \mathscr{V}$ и H — предсказуемый процесс с $H \circ A \in \mathscr{A}_{loc}$, то $H \circ A \in \mathscr{M}_{loc}$ и $A^p = 0$.

Пример. Если $A=(A_t)_{t\geqslant 0}$ — процесс Пауссона с параметром λ, то процесс $A\in\mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$ и локально ограничен. Его компенсатор $A^p_t=\lambda t$, $t\geqslant 0$.

§ 5. Случайные меры. Целочисленные случайные меры

1. Концепция «случайной меры» является одной из основных в стохастическом исчислении, давая возможность детального изучения скачков случайных процессов, траектории которых принадлежат пространству **D** функций, являющихся непрерывными справа и имеющих пределы слева.

При определении случайной меры (далее, $\mu=\mu(\omega;\ dt,\ dx)$) предполагается заданным стохастический базис $\mathcal{B}=(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0},\mathbf{P})$ и вспомогательное пространство $(E,\ \mathcal{E})$, предполагаемое пространством Блэквелла (в дальнейшем в качестве такового достаточно брать $E=R$; примером такого пространства является, например, польское пространство с его борелевской σ-алгеброй).

Определение 1. *Случайная мера* на $R_+\times E$ есть семейство $\mu=(\mu(\omega;\ dt,\ dx);\ \ \omega\in\Omega)$ неотрицательных мер (на $R_+\times E$, $\mathcal{B}(R_+)\otimes\mathcal{E}$), удовлетворяющих тождественно условию

$$\mu(\omega;\ \{0\}\times E)=0.$$

Введем обозначения:

$$\tilde{\Omega}=\Omega\times R_+\times E,\quad \tilde{\mathcal{O}}=\mathcal{O}\otimes\mathcal{E},\ \tilde{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\otimes\mathcal{E}.$$

Функция $W=W(\omega,\ t,\ x)$, определенная на $\tilde{\Omega}$, являющаяся $\tilde{\mathcal{O}}$ (соответственно $\tilde{\mathcal{P}}$)-измеримой, называется *опциональной* (соответственно *предсказуемой*).

С каждой случайной мерой μ и опциональной функцией W можно связать (интегральный) процесс $W*\mu$, полагая по определению

$$W*\mu_t=$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{[0,t]\times E} W(\omega,\ s,\ x)\mu(\omega;\ ds,\ dx), & \text{если } \displaystyle\int\limits_{[0,t]\times E}|W|\mu(\omega;ds,dx)<\infty\\ \infty & \text{в других случаях.}\end{cases}$$

Определение 2. Случайная мера μ называется *опциональной* (соответственно *предсказуемой*), если для каждой опциональной (соответственно предсказуемой) функции W процесс $W*\mu$ является опциональным (соответственно предсказуемым). Случайиая мера μ называется *интегрируемой*, если $I*\mu\in\mathcal{A}^+$. Опциональная мера μ называется *$\tilde{\mathcal{P}}$-σ-конечной*, если существует $\tilde{\mathcal{P}}$-измеримое разбиение (A_n) пространства $\tilde{\Omega}$ такое, что $I_{A_n}*\mu\in\mathcal{A}^+$.

Пример. С каждым считающим процессом $A \in \mathscr{V}^+$ можно связать случайную меру μ, полагая

$$\mu(\omega;\ dt \times \{1\}) = dA_t(\omega)$$

В этом случае мера μ-опциональна; она является предсказуемой тогда и только тогда, когда A-предсказуемый процесс.

Следующая теорема (о существовании «компенсатора» у случайной меры является обобщением теоремы 3 из предыдущего параграфа.

Теорема 3.13. Пусть μ-опциональная $\tilde{\mathscr{P}}$-σ-конечная случайная мера. Тогда существует предсказуемая случайная мера ν, называемая *компенсатором* меры μ, такая что выполнено любое из следующих равносильных утверждений:

а) для каждой $\tilde{\mathscr{P}}$ измеримой функции W на $\tilde{\Omega}$ с $|W| * \mu \in \mathscr{A}^+_{loc}$ процесс $|W| * \nu \in \mathscr{A}^+_{loc}$ и $W * \nu$ есть компенсатор $W * \mu$, т. е. $W * \mu - W * \nu \in \mathscr{M}_{loc}$.

в) $E(W * \nu)_\infty = E(W * \mu)_\infty$ для каждой неотрицательной $\tilde{\mathscr{P}}$-измеримой функции W на $\tilde{\Omega}$.

Такая мера ν определяется единственным образом с точностью до множеств $\mathbf{P}$-меры нуль.

2. В классе случайных мер особо важную роль играют целочисленные случайные меры.

Определение 3. Случайная мера μ оказывается *целочисленной*, если

a) $\mu(\omega;\ \{t\} \times E) \leqslant 1$ тождественно;

b) для каждого $A \in \mathscr{B}(R_+) \otimes \mathscr{E}$ $\mu(\cdot, A) \in \{0, 1, \ldots, \infty\}$;

c) μ опциональная и $\tilde{\mathscr{P}}$-σ-конечна.

Примером такой меры может служить мера μ^X скачков согласованного процесса X с траекториями из пространства $\mathbf{D}$:

$$\mu^X(\omega; dt, dx) = \sum_s I_{\{\Delta X_s(\omega) \neq 0\}} \varepsilon_{(s, \Delta X_s(\omega))}\, dt, dx),$$

где $\varepsilon_{(a)}$ — мера Дирака в точке a.

Фундаментальным примером целочисленной случайной меры является пуассоновская мера.

Определение 4. Целочисленная случайная мера μ называется *расширенной пуассоновской* мерой, если

a) мера $m(A) = E\mu(A)$, $A \in \mathscr{B}(R_+) \otimes \mathscr{E}$, является σ-конечной;

b) для каждого $s \in R_+$ и каждого $A \in \mathscr{B}(R_+) \otimes \mathscr{E}$ такого, что $A \subseteq (s, \infty) \times E$ и $\mu(A) < \infty$, случайная величина $\mu(\cdot, A)$ не зависит от σ-алгебры $\mathscr{F}_s$.

Мера m называется интенсивностью меры μ и если m такова, что $m(\{t\} \times E) = 0$ для каждого $t \in R_+$, то μ называется пуассоновской случайной мерой и к тому же однородной, если $m(dt, dx) = dt \times F(dx)$, где F — положительная σ-конечная мера на $(E, \mathscr{E})$.

Нетрудно проверить, что для расширенной пуассоновской меры с интенсивностью m ее компенсатор $\nu(\omega;\ \cdot)=m(\cdot)$.

Другим примером целочисленной случайной меры является мера $\mu^{(T,X)}$ мультивариантного точечного процесса

$$(T,\ X)=(T_n,\ X_n)_{n\geqslant 1},$$

определяемая формулой

$$\mu(\omega;\ dt,\ dx)=\sum_{n\geqslant 1} I(T_n<\infty)\,\varepsilon_{(T_n,X_n)}(dt,\ dx),$$

где $(T_n)_{n\geqslant 1}$ — марковские моменты такие, что $T_1>0$

$$T_n<T_{n+1} \text{ на } \{T_n<\infty\} \text{ и } T_{n+1}=T_n \text{ на } \{T_n=\infty\},$$

а X_n — случайные элементы со значениями в E, обладающие тем свойством, что

$$X_n\in E \text{ на } \{T_n<\infty\} \text{ и } X_n=\delta \text{ на } \{T_n=\infty\},$$

где δ — некоторая «фиктивная» точка, не принадлежащая E и $\{X_n\in C\}\in\mathcal{F}_{T_n}$ для всякого $C\in\mathscr{E}$.

§ 6. Локально квадратично интегрируемые мартингалы. Квадратическая характеристика

1. Пусть $\mathscr{H}^2$ и $\mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ — классы квадратично и локально квадратично-интегрируемых мартингалов. Если M и N принадлежат классу $\mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ то им можно поставить в соответствие предсказуемый процесс, обозначаемый $\langle M, N\rangle$, принадлежащий классу $\mathscr{V}$ и такой, что $MN-\langle M,\ N\rangle\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$.

Этот процесс $\langle M, N\rangle$, называется *предсказуемой квадратической ковариацией* или *квадратической характеристикой* пары (M, N).

Если $M\in\mathscr{H}^2$, то согласно разложению Дуба—Мейера применяемого к субмартингалу M^2 найдется (и притом единственный с точностью до стохастической неразличимости) предсказуемый процесс $\langle M\rangle\in\mathscr{A}^+$ такой, что $M^2-\langle M\rangle\in\mathscr{M}$. Процедурой локализации отсюда устанавливается существование предсказуемого процесса $\langle M\rangle$ или $\langle M, M\rangle$ из класса $\mathscr{V}^+$, называемого квадратической характеристикой M, такого что $M^2-\langle M\rangle\in$ $\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$. Из этого результата непосредственно выводится, что квадратическая характеристика $\langle M, N\rangle$ может быть определена формулой

$$\langle M,N\rangle=\frac{1}{4}(\langle M+N,\ M+N\rangle-\langle M-N,\ M-N\rangle).$$

Фундаментальным примером непрерывного квадратично интегрируемого мартингала является винеровский процесс $W=$

$=(W_t)_{t\geqslant 0}$, определяемый на некотором стохастическом базисе $\mathscr{B}=(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$.

Определение 2. *Винеровский* процесс W на $\mathscr{B}$ есть согласованный непрерывный процесс с $W_0=0$, $\sigma^2(t)=\mathbf{E}W_t^2$, $\mathbf{E}W_t=0$, $t\geqslant 0$, и W_t-W_s не зависящих от $\mathscr{F}_s$, $0\leqslant s\leqslant t$.

Если дисперсия $\sigma^2(t)=t$, то W называется *стандартным винеровским процессом.*

Винеровский процесс W является квадратично-интегрируемым мартингалом, квадратическая характеристика которого $\langle W\rangle_t=\sigma^2(t)$.

§ 7. Разложение локальных мартингалов

1. Определение 1. Два локальных мартингала M и N называются *ортогональными,* если их произведение $MN\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$. Если $M, N\in\mathscr{H}^2$, то это определение равносильно тому, что $\langle M, N\rangle=0$, что во многом и объясняет термин «ортогональность» в общей ситуации.

Определение 2. Пусть $\mathscr{M}^c_{\mathrm{loc}}$ — класс непрерывных (т. е. с непрерывными траекториями) локальных мартингалов. Локальный мартингал N называется *чисто разрывным* локальным мартингалом ($N\in\mathscr{M}^d_{\mathrm{loc}}$), если N ортогонален любому непрерывному мартингалу M.

В общей теории случайных процессов известны следующие два разложения локальных мартингалов.

Первое разложение. Пусть $a>0$. Каждый локальный мартингал M допускает (вообще говоря, неединственное) разложение

$$M=M_0+M'+M'',$$

где M', $M''\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$, $M_0'=M_0''=0$, при этом M' имеет конечную вариацию и $|\Delta M''|\leqslant a$ (следовательно, $M''\in\mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$).

Второе разложение. Каждый локальный мартингал M допускает (и притом единственное с точностью до стохастической неразличимости) разложение

$$M=M_0+M^c+M^d,$$

где $M_0^c=M_0^d=0$, M^c — непрерывный локальный мартингал $\left(M^c\in\mathscr{M}^c_{\mathrm{loc}}\right)$, а M^d — чисто разрывный локальный мартингал $\left(M^d\in\mathscr{M}^d_{\mathrm{loc}}\right)$.

Процесс M^c называется *непрерывной составляющей* M, а M^d — *чисто разрывной составляющей* M.

§ 1. Семимартингалы. Квадратическая вариация. Квазимартингалы

1. Определение 1. Заданный на стохастическом базисе $\mathscr{B}=(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ согласованный случайный процесс $X=(X_t)_{t\geq 0}$ с траекториями из $\mathbf{D}$ называется *семимартингалом* ($X\in S$), если он допускает представление в виде

$$X=X_0+M+A, \tag{3.1}$$

где X_0 — конечно-значная $\mathscr{F}_0$-измеримая случайная величина, M — локальный мартингал ($M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$) с $M_0=0$ и A — процесс ограниченной вариации ($A\in\mathscr{V}$) с $A_0=0$.

В том случае, когда существует представление (3.1) с предсказуемым процессом A, семимартингал X называется *специальным* ($X\in S_p$). Отметим, что для специальных семимартингалов представление в виде (3.1) с предсказуемым процессом A является единственным. Часто оно называется *каноническим разложением* специального семимартингала. Всякий семимартингал X с ограниченными скачками, $|\Delta X|\leqslant c$ является специальным и в его каноническом разложении $X=X_0+A+M$ имеем $|\Delta M|\leqslant 2c$, $|\Delta A|\leqslant c$. В частности, если X — непрерывный семимартингал, то в его каноническом разложении процессы M и A также непрерывны.

Хотя это и не ясно сразу из данного выше определения, класс семимартингалов обладает многими «приятными» свойствами. Например, он является устойчивым по отношению ко многим преобразованиям: «остановленный» семимартингал снова есть семимартингал, «локализация» сохраняет семимартингал, семимартингал остается семимартингалом при замене времени, относительно абсолютно непрерывной замена меры, при редукции фильтраций.

Важное свойство семимартингалов состоит в том, что это они образуют тот максимальный класс процессов, по которым можно интегрировать ограниченные предсказуемые процессы с естественно предъявляемыми к интегралу свойствам типа выполнения теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. (Подробнее см. [25].)

2. Хотя представление (3.1) семимартингала не является единственным, однако непрерывная мартингальная составляющая, обозначаемая X^c, единственна. Иначе говоря, если $X=X_0+M_1+A_1$ и $X=X_0+M_2+A_2$ — два представления, то $M_1^c=M_2^c=X^c$.

3. Важной характеристикой семимартингала X является его *квадратическая вариация*

$$[X, X]_t=\langle X^c\rangle_t+\sum_{s\leqslant t}(\Delta X_s)^2.$$

Если X и Y — два семимартингала, то через $[X, Y]$ обозначается их *квадратическая ковариация*, определенная формулой

$$[X, Y] = \frac{1}{4}([X+Y, X+Y] - [X-Y, X-Y]).$$

В следующей теореме представлен ряд свойств $[X, X]$ и $[X, Y]$.

Теорема 3.14. Если X и Y — семимартингалы, то

1) $[X, Y] \in \mathscr{V}$, $[X, X] \in \mathscr{V}^+$;

2) $\Delta[X, Y] = \Delta X \Delta Y$;

3) если $Y \in \mathscr{V}$, то $[X, Y]^c = 0$;

4) если $Y \in \mathscr{V}$ и является непрерывным, то $[X, Y] = 0$;

5) если $X \in \mathscr{M}^c_{\mathrm{loc}}$, то $[X, X] = [X, X]^c = \langle X \rangle$;

6) если $X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$, $|X| \leqslant c$, $X_0 = 0$ и Y является предсказуемым процессом ограниченной вариации, то $[X, Y] \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$;

7) если $X, Y \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$, то $XY - X_0 Y_0 - [X, Y] \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$;

8) если $X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$, то $[X, X]^{1/2} \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$;

9) если $X \in \mathscr{M}^c_{\mathrm{loc}}$, $Y \in \mathscr{M}^d_{\mathrm{loc}}$, то $[X, Y] = 0$;

10) $[X, Y] = \langle X, Y \rangle = 0$, если $X \in \mathscr{M}^c_{\mathrm{loc}}$, $Y \in \mathscr{M}^c_{\mathrm{loc}}$, притом X и Y ортогональны.

4. Родственным понятию семимартингала является понятие квазимартингала.

Пусть $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ — согласованный процесс с траекториями из пространства $\mathbf{D}$. Положим для $n \geqslant 1$ и $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$

$$\mathrm{Var}(X; t_1, \ldots, t_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |\mathbf{E}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathscr{F}_{t_i})| + |X_{t_n}|$$

и

$$\mathrm{Var}(X) = \sup_{n, t_1, \ldots, t_n} \mathbf{E}\,\mathrm{Var}(X; t_1, \ldots, t_n).$$

Если $\mathrm{Var}(X) < \infty$, то процесс X называется *квазимартингалом* ($X \in Q$).

Заметим, что если $X \in \mathscr{M}$, то

$$\mathrm{Var}(X) = \sup_t \mathbf{E}|X_t| < \infty$$

и, значит, $\mathscr{M} \subseteq Q$. Если $X \in \mathscr{A}$, то

$$\mathrm{Var}(X) \leqslant 2\mathbf{E}\int_0^\infty |dX_s| < \infty$$

и, значит, $\mathscr{A} \in Q$. Отсюда выводится, что всякий специальный семимартингал является локальным квазимартингалом. На самом деле эти два класса процессов совпадают.

§ 2. Конструкция стохастических интегралов по семимартингалам

1. В том случае, когда $X \in \mathscr{V}$ и H — ограниченный процесс, интегральный процесс $(H \cdot X)_t = \int_0^t H_s dX_s$ был определен в I. § 4. Цель настоящего параграфа — определить интеграл $H \circ X$ для того случая, когда X — семимартингал.

Поскольку семимартингал не обязательно имеет локально ограниченную вариацию, то определение интеграла $(H \circ X)_t$ как интеграла Лебега—Стильтьеса для каждого элементарного исхода становится неприемлемым.

Если семимартингал $X = X_0 + M + A$, где $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ и $A \in \mathscr{V}$, то при определении «интеграла» $H \cdot X$ для локально ограниченных процессов H можно было бы поступить так: по определению положить

$$H \circ X = H \circ M + H \circ A, \tag{3.2}$$

где $H \circ M$ — подлежащий еще определению «стохастический интеграл» по локальному мартингалу, а $H \circ A$ — уже определенный (в I. § 4) интеграл по A. Разумеется, при этом надо будет и установить корректность определения (3.2) в том смысле, что оно не зависит от вида представления $X = X_0 + M + A$.

При определении интеграла $H \circ M$ по локальному мартингалу M можно идти двумя путями — основываясь либо на первом, либо втором разложении M (см. 1. § 7).

Если основываться на первом разложении, то основная трудность будет состоять в том, чтобы определить стохастический интеграл $H \circ M$ по локальному мартингалу $M \in \mathscr{H}^2$.

Опишем соответствующую конструкцию интеграла $H \circ M$.

Пусть $\mathscr{E}$ — множество всех процессов $H = (H_{t(\omega)})_{t \geqslant 0}$ вида: или

$H = YI_{[0]}$, где Y — ограниченная, $\mathscr{F}_0$-измеримая случайная величина,

или

$H = YI_{]r,s]}$, $r < s$, где Y — ограниченная, $\mathscr{F}_r$-измеримая случайная величина.

Для таких функций H полагаем по определению

$$(H \circ M)_t = \begin{cases} 0, & \text{если } H = YI_{[0]} \\ Y(M_{s \wedge t} - M_{r \wedge t}), & \text{если } H = YI_{]r,s]}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Наряду с обозначением $(H \circ M)_t$ используют также обозначения $\int_0^t H_s dM_s$, или $\int_{(0,t]} H_s dM_s$.

Теорема 3.15. Пусть $M \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$. Тогда отображение $H \to H \circ M$, определенное формулой (3.3) для функций класса $\mathscr{E}$, может быть продолжено на класс функций

$$L^2_{\mathrm{loc}}(M)=\{H:H\text{ — предсказуемы и } H^2\circ\langle M\rangle\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}\}$$

так, что это расширение, также обозначаемое $H\circ M$, обладает следующими свойствами:

1) $H\circ M$ — согласованный процесс с траекториями из $\mathbf{D}$;

2) $H\to H\circ M$ линейно, т. е. $(aH+K)\circ M=aH\circ M+K\circ M$;

3) если последовательность (H^n) предсказуемых процессов сходится поточечно к пределу H и $|H^n|\leqslant K$, где $K\in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$, то

$$\sup_{s\leqslant t}|H^n\circ M-H\circ M|\xrightarrow{\mathrm{P}}0,\quad t\in R_+.$$

Расширение $H\circ M$ обладает к тому же свойствами:

4) $H\circ M\in\mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$;

5) $H\circ M\in\mathscr{H}^2$ если и только если $H\in L^2(M)=\{H:H$ — предсказуемы и $H^2\circ\langle M\rangle\in\mathscr{A}^+\}$;

6) $M\rightsquigarrow H\circ M$ линейно;

7) $(H\circ M)_0=0$, $H\circ M=H\circ(M-M_0)$;

8) $\Delta(H\circ M)=H\Delta M$;

9) если $H\in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ и $K\in L^2_{\mathrm{loc}}(H\circ M)$, то $K\circ(H\circ M)=(KH)\circ M$;

10) если $M,\ N\in\mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ и $H\in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$, $K\in L^2_{\mathrm{loc}}(N)$, то $\langle H\circ M,\ K\circ N\rangle=(HK)\circ\langle M,N\rangle$

2. В случае определения стохастических интегралов $H\circ X$ по семимартингалу на класс «интегрантов» H приходится накладывать такие ограничения, которые дали бы возможность одновременно определить интегралы $H\circ M$ и $H\circ A$ с сохранением естественно предъявляемым к ним требованиям (согласованность, линейность, ...). Это удается сделать (используя формулу (3.2) как определение $H\circ X$), если потребовать, чтобы H был предсказуемым и локально ограниченным процессом.

Теорема 3.15′. Пусть X — семимартингал. Тогда отображение определяемое формулой

$$(H\cdot X)_t=\begin{cases}0, & \text{если } H=YI_{[0]},\\ Y(X_{s\wedge t}-X_{r\wedge t}), & \text{если } H=YI_{]r,s]}\end{cases}\tag{3.4}$$

для $H\in\mathscr{E}$, может быть продолжено на класс всех локально ограниченных предсказуемых процессов H. Это продолжение также, обозначаемое $H\cdot X\left(\int\limits_0^{\cdot}H_s dX_s,\ \int\limits_{(0,\cdot]}H_s dX_s\right)$ и называемое стохастическим интегралом от H по семимартингалу X, обладает следующими свойствами:

1) $H\circ X$ — согласованный процесс с траекториями из $\mathbf{D}$;

2) $H\rightsquigarrow H\circ X$ линейно;

3) если последовательность (H^n) предсказуемых процессов сходится поточечно к пределу H и $|H^n|\leqslant K$, где K — некоторый локально ограниченный предсказуемый процесс, то $H^n\circ X_t\xrightarrow{\mathrm{P}}H\circ X_t$ для всех $t\in R_+$;

Интеграл $H\circ X$ обладает к тому же свойствами:

4) $H\circ X$ — семимартингал;

5) если $x\in M_{\text{loc}}$, то $H\circ X\in M_{\text{loc}}$, если $X\in\mathscr{V}$, то $H\circ X\in\mathscr{V}$;

6) $X\rightsquigarrow H\circ X$ линейно;

7) $(H\circ X)_0=0$, $H\circ X=H\cdot(X-X_0)$;

8) $\Delta(H\circ X)=H\Delta X$.

3. Интересно отметить, что в том случае, когда подлежащий интегрированию процесс H является непрерывным слева, интеграл может быть определен как «предел Римановских сумм».

Именно, пусть $\tau=(\tau_n)$ — последовательность марковских моментов таких, что $\tau_0=0$, $\sup\limits_n \tau_n<\infty$ и $\tau_n<\tau_{n+1}$, если $\tau_n<\infty$.

Назовем величину

$$\tau(H\circ X)_t=\sum_n H_{\tau_n}(X_{\tau_{n+1}\wedge t}-X_{\tau_n\wedge t})$$

τ — римановской аппроксимацией интеграла $(H\circ X)_t$.

Будем говорить, что «двойная» последовательность $(\tau_n)_{n\geqslant1}=$ $=((\tau(n, m)_{m\geqslant1})_{n\geqslant1}$, есть римановская последовательность, если

$$\sup_{m\geqslant1}[\tau(n, m+1)\wedge t-\tau(n, m)\wedge t]\to0,\quad n\to\infty.$$

Теорема 3.16. Пусть X — семимартингал, H — непрерывный слева согласованный процесс и $(\tau_n)_{n\geqslant1}$ — римановская последовательность. Тогда τ_n — римановские аппроксимации $\tau_n(H\circ X)$ сходятся к $H\circ X$ по вероятности равномерно на каждом компактном интервале:

$$\sup_{s\leqslant t}|\tau_n(H\circ X)_s-\tau(H\circ X)_s|\xrightarrow{\text{P}}0.$$

4. В II. § 1 были определены квадратические вариации $[X, X]$ и ковариации $[X, Y]$ семимартингалов X и Y и указаны ряд их свойств. Имея определение стохастического интеграла по семимартингалу, можно установить справедливость следующей формулы:

$$[X, Y]=XY-X_0Y_0-X_-\circ Y-Y_-\circ X.$$

Объяснение терминологии для $[X, X]$ и $[X, Y]$ как квадратических вариацни и ковариации проистекает из следующего свойства.

Пусть $(\tau_n)_{n\geqslant1}=((\tau(n, m))_{m\geqslant1})_{n\geqslant1}$ есть римановская последовательность и

$$S_{\tau_n}(X, Y)_t=\sum_{m\geqslant1}(X_{\tau(n,m+1)\wedge t}-X_{\tau(n,m)\wedge t})(Y_{\tau(n,m+1)\wedge t}-Y_{\tau(n,m)\wedge t}).$$

Тогда процесс $S_{\tau_n}(X, Y)$ сходится к процессу $[X, Y]$ по мере равномерно на каждом компактном интервале.

1. Пусть $D_i f$ и $D_{ij} f$ есть частные производные $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ функции $f = f(x^1, \ldots, x^d)$.

Теорема 3.17. *Формула (замены переменных) Ито.* Пусть $X = (X^1, \ldots, X^d)$ есть d-мерный семимартингал (т. е. каждый из процессов X^i, $i = 1, \ldots, d$ является семимартингалом) и $f = f(x^1, \ldots, x^d)$ — функция класса C^2. Тогда процесс $f(X)$ является семимартингалом и

$$f(X_t) = f(X_0) + \\
+ \sum_{i \leqslant d} D_i f(X_-) \circ X^i_t + \frac{1}{2} \sum_{i, j \leqslant d} D_{ij} f(X_-) \circ \langle X^{ic}, X^{jc} \rangle_t + \\
+ \sum_{s \leqslant t} \Big[f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i \leqslant d} D_i f(X_{s-}) \Delta X^i_s \Big]. \qquad (3.5)$$

Замечание. В случае дискретного времени формула (3.5) превращается в тривиальное тождество:

$$f(X_n) = f(X_0) + \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \sum_{i \leqslant d} D_i f(X_{m-1}) (X^i_m - X^i_{m-1}) + \\
+ \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \Big[f(X_m) - f(X_{m-1}) - \sum_{i \leqslant d} D_i f(X_{m-1}) (X^i_m - X^i_{m-1}) \Big]. \qquad (3.6)$$

Приведем ряд примеров на применение формулы Ито.

Пример 1. Если X и Y — семимартингалы и $f(x, y) = xy$, то из (3.5) следует, что

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + (X_- \circ Y)_t + (Y_- \circ X)_t + [X, Y]_t, \qquad (3.7)$$

поскольку

$$[X, Y] = \langle X^c, Y^c \rangle + \sum_{s \leqslant \cdot} \Delta X_s \Delta Y_s.$$

В частности,

$$X_t^2 = X_0^2 + 2(X_- \circ X)_t + [X, X]_t. \qquad (3.8)$$

Пример 2 *(уравнение Долеан-Дэд)*. Пусть X — семимартингал. Рассмотрим уравнение Долеан—Дэд

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_{s-} dX_s \qquad (3.9)$$

или в «дифференциальной» форме

$$dY = Y_- dX, \quad Y_0 = 1.$$

Это уравнение имеет и притом единственное согласованное решение $\mathscr{E}(X)$ из класса $\mathbf{D}$, которое является семимартингалом и задаваемое формулой

$$\mathscr{E}(X)_t = e^{X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c\rangle_t} \prod_{s\leqslant t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}. \tag{3.10}$$

(Функция $\mathscr{E}(X)$ носит название *стохастической экспоненты*). То, что $\mathscr{E}(X)$ есть решение уравнения (3.9) проверяется непосредственным применением формулы Ито к произведению V_tU_t двух семимартингалов

$$V_t = e^{X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c\rangle_t},$$

$$U_t = \prod_{s\leqslant t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}.$$

§ 4. Конструкция стохастических интегралов по случайным мерам

1. Изучение скачкообразных компонент локальных мартингалов и семимартингалов требует наряду с интегралами типа $W*\mu$ и $W*\nu$ (по случайным мерам μ и их компенсаторам ν; см. I § 5) рассмотрения также интегралов типа $W*(\mu-\nu)$ по «компенсированным» мерам $\mu-\nu$.

«Наивным определением» интеграла $W*(\mu-\nu)$ могло бы служить его определение как разности $W*\mu-W*\nu$. Однако такое «определение» страдает тем недостатком, что дает возможность интегрировать слишком узкий класс функций W.

Чтобы дать полное изложение рассматриваемого круга вопросов, введем ряд определений и обозначений.

Во всем дальнейшем предполагается, что задан стохастический базис $\mathscr{B}=(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$, $\mu=\mu(\omega; dt, dx)$ — целочисленная случайная мера на $R_+\times E$, где $(E, \mathscr{E})$ — пространство Блэкуэлла и $\nu=\nu(\omega; dt, dx)$ — компенсатор меры μ. (Всегда существует такая версия ν с $\nu(\omega; \{t\}\times E)\leqslant 1$ тождественно; именно такая версия и будет далее рассматриваться).

Положим

$$a_t(\omega)=\nu(\omega; \{t\}\times E), \quad J=\{\omega, t: a_t(\omega)>0\},$$

$$\nu^c(\omega; dt, dx)=\nu(\omega; dt, dx)I_{\bar{J}}(\omega, t).$$

С каждой $\tilde{\mathscr{P}}$ измеримой функцией $W=W(\omega, t, x)$ свяжем следующие два возрастающих предсказуемых процесса

$$C(W)_t=(W-\hat{W})^2*\nu_t+\sum_{s\leqslant t}(1-a_s)(\hat{W}_s)^2,$$

$$\bar{C}(W)_t=|W-\hat{W}|*\nu_t+\sum_{s\leqslant t}(1-a_s)|\hat{W}_s|,$$

где

$$\hat{W}_t(\omega)=\begin{cases}\int\limits_E W(\omega,\ t,\ x)\nu(\omega;\ \{t\}\times dx,\\ \text{если } \int\limits_E |W(\omega,\ t,\ x)|\nu(\omega;\{t\}\times dx)<\infty,\\ \qquad\infty,\ \text{в других случаях.}\end{cases}$$

Кроме того, положим

$$W'=(W-\hat{W})I_{\{|W-\hat{W}|\leqslant 1\}}+\hat{W}I_{\{|\hat{W}|\leqslant 1\}},$$

$$W''=(W-\hat{W})I_{\{|W-\hat{W}|>1\}}+\hat{W}I_{\{|\hat{W}|>1\}}.$$

Определение 1. Будем говорить, что $\tilde{\mathscr{P}}$-измеримая функция $W=W(\omega,\ t,\ x)$ принадлежит классу $G_{\text{loc}}(\mu)$, если

$$C(W')+\bar{C}(W'')\in\mathscr{A}^+_{\text{loc}}.$$

Определение 2. Стохастическим интегралом от $\tilde{\mathscr{P}}$-измеримой функции $W\in G_{\text{loc}}(\mu)$ по $\mu-\nu$, обозначаемым $W*(\mu-\nu)$ называется чисто разрывный локальный мартингал X такой, что

$$\Delta X_t=\int\limits_E W(\omega,\ t,\ x)\mu(\omega;\ \{t\}\times dx)-\hat{W}_t(\omega).$$

Показывается, что это определение корректно в том смысле, что для функций $W\in G_{\text{loc}}(\mu)$ такой процесс $X\in\mathscr{M}^d_{\text{loc}}$ действительно существует и с точностью до стохастической неразличимости является единственным.

Смысл введенных выше определений и понятий раскрывается следующей теоремой.

Теорема 3.18. Пусть W — $\tilde{\mathscr{P}}$-предсказуемая функция.

1) Функция $W\in G_{\text{loc}}(\mu)$ и $W*(\mu-\nu)\in\mathscr{H}^2$ (соотв. $\mathscr{H}^2_{\text{loc}}$) в том и только том случае, когда $C(W)\in\mathscr{A}^+$ (соотв. $\mathscr{A}^+_{\text{loc}}$). В этом случае

$$\langle W*(\mu-\nu)\rangle=C(W).$$

2) Функция $W\in G_{\text{loc}}(\mu)$ и $W*(\mu-\nu)\in\mathscr{A}$ (соотв. $\mathscr{A}_{\text{loc}}$) в том и только том случае, когда $\bar{C}(W)\in\mathscr{A}^+$ (соотв. $\mathscr{A}^+_{\text{loc}}$).

3) Функция $W\in G_{\text{loc}}(\mu)$ в том и только том случае, когда процесс

$$\tilde{W}_t(\omega)=\int\limits_E W(\omega,\ t,\ x)\mu(\omega;\{t\}\times dx)-\hat{W}_t(\omega)$$

таков, что

$$\sqrt{\sum_{s\leqslant\cdot}(\tilde{W}_s)^2}\in\mathscr{A}^+_{\text{loc}}$$

В приводимой ниже теореме 3.19 описывается один случай, когда интеграл $W*(\mu-\nu)$ равен $W*\mu-W*\nu$.

Теорема 3.19. Пусть W — $\widetilde{\mathscr{P}}$-измерима и $|W| * \mu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{+}$ (эквивалентно: $|W| * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{+}$). Тогда $W \in G_{\mathrm{loc}}(\mu)$ и

$$W * (\mu - \nu) = W * \mu - W * \nu.$$

2. Рассмотрим вопрос о представлении чисто разрывных локальных мартингалов как стохастических интегралов по мере $\mu - \nu$.

Пусть $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$, $E = R \setminus \{0\}$,

$$\mu(\omega;\ dt,\ dx) = \sum_{s>0} I(\Delta M_s \neq 0)\ \varepsilon_{(s, \Delta M_s)}(dt,\ dx)$$

— мера скачков процесса M и ν — ее компенсатор. Тогда для $W(\omega,\ t,\ x) = x$

$$\hat{W}_t(\omega) = \int_E x \nu(\omega;\ \{t\} \times dx) = 0,$$

$C(W) = x^2 * \nu$, $\bar{C}(W) = |x| * \nu$, $(x^2 \wedge |x|) * \nu \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{+}$. Значит $W \in G_{\mathrm{loc}}(\mu)$ и определен интеграл $x * (\mu - \nu)$. При этом $x * (\mu - \nu)$ совпадает с чисто разрывной компонентой M^d процесса M:

$$M_t^d = \int_0^t \int_E x d(\mu - \nu).$$

Если при этом $M^d \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{2,d}$, то $\langle M^d \rangle = x^2 * \nu$.

§ 5. Характеристики семимартингалов. Триплет предсказуемых характеристик $T = (B, C, \nu)$. Проблемы мартингалов и семимартингалов. Примеры

1. Пусть $X = (X^1, \ldots, X^d)$ — d-мерный семимартингал, определенный на стохастическом базисе $\mathscr{B} = (\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathbf{P})$. В этом параграфе дается определение важному понятию триплета предсказуемых характеристик семимартингала X, в терминах которых описываются разнообразные их свойства.

Пусть $\mathscr{G}_{tr}^d$ — класс всех функций урезания $h: E^d \to E^d$, которые ограничены, имеют компактный носитель и удовлетворяют свойству $h(x) = x$ в окрестности нуля.

Если $h \in \mathscr{G}_{tr}^d$, то $\Delta X_s - h(\Delta X_s) \neq 0$ только если $|\Delta X_s| > b$ для некоторого $b > 0$. Положим $\mu = \mu(\omega;\ dt,\ dx)$ — мера скачков X,

$$\check{X}(h)_t = \sum_{s \leqslant t} [\Delta X_s - h(\Delta X_s)] \left(= \int_0^t \int (x - h(x))\, d\mu \right),$$

$$X(h) = X - \check{X}(h).$$

Процесс $\check{X}(h) \in \mathscr{V}^d$ (т. е. его компоненты принадлежат классу $\mathscr{V}$), а процесс $X(h)$ является семимартингалом с ограниченными скачками и, следовательно, есть специальный семимартингал. Согласно § 1 всякий специальный семимартингал допускает каноническое разложение

$$X(h)=X_0+M(h)+B(h), \tag{3.11}$$

где $M(h)\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$, $M_0(h)=0$ и $B(h)$ есть предсказуемый процесс класса $\mathscr{V}^d$. С учетом того, что

$$M^d(h)_t=\int_0^t\int h(x)\,d(\mu-\nu),$$

получаем следующее каноническое представление для семимартингала X:

$$X_t=X_0+B_t(h)+X_t^c+\int_0^t\int h(x)\,d(\mu-\nu)+ \\ +\int_0^t\int(x-h(x))\,d\mu. \tag{3.12}$$

Определение 1. Пусть h есть фиксированная функция урезания $h\in\mathscr{G}_{tr}^d$. *Триплетом предсказуемых характеристик* (относительно функции h), $T=(B, C, \nu)$, называется набор, состоящий из

1) $B=(B^i)_{i\leqslant d}$ — предсказуемый процесс $B=B(h)$;

2) $C=(c^{ij})_{i,j\leqslant d}$ — непрерывный процесс в $\mathscr{V}^d\times\mathscr{V}^d$ с $c^{ij}=\langle X^{ic}, X^{jc}\rangle$;

3) ν — предсказуемая случайная мера на $R_+\times E^d$, являющаяся компенсатором меры μ скачков процесса X.

Важно отметить, что вторая и третья характеристики C и ν являются «внутренними» характеристиками семимартингала (в том смысле, что они не зависят от выбора функции урезания h). Что же касается первой характеристики, то для функций урезания h и h'

$$B(h)-B(h')=(h-h')*\nu.$$

2. Для многих целей удобно ввести понятие второй модифицированной характеристики $\tilde{C}=(\tilde{c}^{ij})_{i,j\leqslant d}$, определяемой формулой

$$\tilde{c}^{ij}=\langle M(h)^i, M(h)^j\rangle.$$

Связь этой характеристики с (B, C, ν) описывается формулой:

$$\tilde{c}^{ij}=c^{ij}+(h^ih^j)*\nu-\sum_{s\leqslant\cdot}\left(\int h^i(x)\,\nu(\{s\}\times dx)\right)\left(\int h^j(x)\,\nu(\{s\}\times dx)\right)= \\ =c^{ij}+(h^ih^j)*\nu-\sum_{s\leqslant\cdot}\Delta B_s^i(h)\,\Delta B_s^j(h). \tag{3.13}$$

3. Следующий результат является полезным с точки зрения альтернативных (и часто более удобных) критериев того, что X есть семимартингал с триплетом $T=(B, C, \nu)$.

Теорема 3.20. Следующие условия являются равносильными:

1) X есть семимартингал с триплетом $T=(B, C, \nu)$;

2) для каждого $\lambda \in E^d$ процесс $e^{i\lambda\cdot X}-e^{i\lambda\cdot X_-}\circ G(\lambda)$ является (комплексно-значным) локальным мартингалом, где

$$G(\lambda)_t=(i\lambda\circ B)_t-\frac{1}{2}(\lambda\circ C_t\circ\lambda)+ \\ +\int(e^{i\lambda x}-1-i\lambda h(x))\nu([0,\ t]*dx); \tag{3.14}$$

3) для каждой ограниченной функции $f=f(x^1,\ldots,x^d)$ класса C^2 процесс

$$f(X)-f(X_0)-\sum_{j\leqslant d} D_j f(X_-)\circ B^j-\frac{1}{2}\sum_{j,k\leqslant d} D_{jk} f(X_-)\circ C^{jk}- \\ -\left[f(X_-+x)-f(X_-)-\sum_{j\leqslant d} D_j f(X_-)h^j(x)\right]\times\nu \tag{3.15}$$

есть локальный мартингал;

4) Каждый из трех процессов

$$M(h)=X(h)-B-X_0, \\ M(h)^i M(h)^j-\tilde{c}^{ij},\ i,\ j\leqslant d \\ g*\mu-g*\nu,\ g\in\mathscr{G}^+ \tag{3.16}$$

является локальным мартингалом ($\mathscr{G}^+$ — семейство ограниченных борелевских функций на E^d, исчезающих в окрестности 0)

5) При дополнительном предположении, что $\Delta G(\lambda)\neq -1$ ($G(\lambda)$ — функция из 2)) процесс

$$e^{i\lambda\cdot X}/\mathscr{E}(G(\lambda)), \tag{3.17}$$

где

$$\mathscr{E}(G)_s=e^{G_s}\prod_{u\leqslant s}(1+\Delta G_u)e^{-\Delta G_u}, \tag{3.18}$$

является (при каждом $\lambda\in E^d$) локальным мартингалом.

4. В связи с характеризацией, изложенной в 4), упомянем о так называемой семимартингальной и мартингальной проблемах, формулируемых следующим образом.

Пусть $(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0})$ — измеримое пространство с фильтрацией $\mathbf{F}$ и вероятностной мерой $\mathbf{P}_{\mathscr{F}_0}$ на $(\Omega,\ \mathscr{F}_0)$. Пусть также $X=(X^i)_{i\leqslant d}$ — d-мерный процесс, заданный на $(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbf{F})$ с траекториями из $\mathbf{D}$ (кандидат быть семимартингалом) и $T=(B, C, \nu)$ — набор (кандидат быть триплетом семимартингала X), где $B=(B^i)_{i\leqslant d}$ — $\mathbf{F}$-предсказуемый процесс конечной вариации на каждом конечном интервале, $B_0=0$; $C=(c^{ij})$, $i, j\leqslant d$ — $\mathbf{F}$-предсказуемая, непрерывная матрица такая, что матрица C_t-C_s, $s\leqslant t$ является неотрицательно определенной и симметрической; ν — $\mathbf{F}$-предсказуемая случайная мера на $R_+\times$

$\times E^d$ такая, что

$$\nu(\omega; R_+\times\{0\})=\nu(\omega; \{0\}\times E^d)=0, \quad |x|^2\wedge 1*\nu_t(\omega)<\infty,$$

$$\int \nu(\omega; \{t\}\times dx)h(x)=\Delta B_t(\omega), \nu(\omega; \{t\}\times E^d)\leqslant 1$$

тождественно.

Определение 1. *Решением семимартингальной проблемы*, связанной с $(\mathscr{F}_0, X)$ и $(\mathbf{P}_{\mathscr{F}_0}; B, C, \nu)$, называется вероятностная мера $\mathbf{P}$ на $(\Omega, \mathscr{F})$ такая, что

1) $\mathbf{P}|\mathscr{F}_0=\mathbf{P}_{\mathscr{F}_0}$,

2) X есть семимартингал на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ с триплетом (заданных) характеристик $T=(B, C, \nu)$ (относительно функции урезания h).

Через $S(\mathscr{F}_0, X|\mathbf{P}_{\mathscr{F}_0}; B, C, \nu)$ обозначим множество всех решений $\mathbf{P}$.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{X}$ — семейство опциональных $\bar{R}$-значных процессов на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0})$, $\mathscr{H}$ — σ-подалгебра $\mathscr{F}_0$ и $\mathbf{P}_{\mathscr{H}}$ — вероятностная мера на $\mathscr{H}$. Решением мартингальной проблемы связанной с $\mathfrak{X}$ и $\mathbf{P}_{\mathscr{H}}$ называется вероятностная мера $\mathbf{P}$ на $(\Omega, \mathscr{F})$ такая, что $\mathbf{P}|\mathscr{H}=\mathbf{P}_{\mathscr{H}}$ и каждый из процессов $X\in\mathfrak{X}$ является локальным мартингалом на стохастическом базисе $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$.

Утверждение 4), сформулированное в теореме 3.20 говорит о том, что семимартингальная проблема, связанная с триплетом $T=(B, C, \nu)$ равносильна соответствующей мартингальной проблеме (с множеством $\mathfrak{X}$, состоящим из трех процессов (3.16)).

Показывается, что множество решений $S(\mathscr{F}_0, X|\mathbf{P}_{\mathscr{F}_0}; B, C, \nu)$ является выпуклым множеством. (По поводу существования и единственности мартингальной и семимартингальной проблем см. [40], гл. III).

5. Остановимся на некоторых примерах семимартингалов и их триплетов.

Пример 1. Пусть $\tilde{\mathscr{B}}=(\Omega, \mathscr{F}, \tilde{\mathbf{F}}=(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathbf{P})$ — «дискретный» стохастический базис и $\xi=(\xi_n)_{n\geqslant 0}$ — последовательность случайных величин таких, что ξ_n—$\mathscr{F}_n$-измеримы, $n\geqslant 0$. На «непрерывном» стохастическом базисе $\mathscr{B}=(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$ с $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{[t]}$ рассмотрим процесс

$$X_t=\sum_{n\leqslant t}\xi_n, \quad t\geqslant 0.$$

Этот процесс является семимартингалом и (относительно функции урезания $h=h(x)$) его триплет $T=(B, C, \nu)$ задается формулой:

$$B_t = \sum_{k\leqslant t} \mathbf{E}(h(\xi_k) \mid \mathscr{F}_{k-1}),$$

$$C_t \equiv 0,$$

$$\nu([0, t]\times g) = \sum_{k\leqslant t} \mathbf{E}[g(\xi_k) I(\xi_k \neq 0) \mid \mathscr{F}_{k-1}],$$

где

$$\nu([0, t]\times g) = \int_0^t \int g(x)\,\nu(\omega; ds, dx).$$

Пример 2. Винеровский процесс $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ с $\mathbf{E}W_t=0$, $\mathbf{E}W_t^2=\sigma^2(t)$ является непрерывным локальным мартингалом с $B=0$, $C_t\equiv\sigma^2(t)$, $\nu=0$.

Пример 3. Пусть $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ — процесс с независимыми приращениями с характеристической функцией

$$g(\lambda)_t = \mathbf{E}\exp(i\lambda\cdot X_t),\ \lambda\in E^d. \tag{3.19}$$

Процесс X с независимыми приращениями является семимартингалом тогда и только тогда, когда при каждом $\lambda\in E^d$ функция $t\to g(\lambda)_t$ имеет конечную вариацию на каждом конечном интервале. С другой стороны, пусть X — d-мерный семимартингал с $X_0=0$. Тогда X — процесс с независимыми приращениями в том и только том случае, когда существует детерминированная версия триплета характеристик. Если $T=(B, C, \nu)$ такой триплет, то

$$g(\lambda)_t = \mathscr{E}(G(\lambda))_t, \tag{3.20}$$

где $G(\lambda)$ — функция, определенная по (B, C, ν) формулой (3.14), а $\mathscr{E}(G)$ — формулой (3.18). В частности, если X — процесс с независимыми приращениями без фиксированных моментов скачков (равносильно; $\nu(\{t\}\times E^d)=0,\ t\geqslant 0$), то функции B_t, C_t $\nu([0, t]\times A)$ являются непрерывными (детерминированными) функциями, $\Delta G(\lambda)_t=0$ и формула (3.20) превращается в формулу Леви—Хинчина:

$$g(\lambda)_t = \exp(G(\lambda)_t),$$

где $G(\lambda)_t$ задается формулой (3.14).

§ 6. Интегральное представление локальных мартингалов

1. Пусть $X=(X^i)_{i\leqslant d}$ — d-мерный семимартингал с характеристиками $T=(B, C, \nu)$, заданный на стохастическом базисе $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$. Пусть X^c — его непрерывная мартингальная составляющая, μ — мера скачков X.

Определение 1. Говорят, что локальный мартингал M, заданный на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$, имеет (по отношению к семимартингалу X) интегральное представление, если M может быть представлен в виде

$$M = M_0 + H \circ X^c + W * (\mu - \nu), \tag{3.21}$$

где $H = (H^i)_{i \leqslant d}$ принадлежит $L^2_{\text{loc}}(X^c)$ и $W \in G_{\text{loc}}(\mu)$.

Следующие два примера являются классическими примерами, когда представление оказывается возможным с $\mathscr{F}_t = \bigcap\limits_{s > t} \mathscr{F}^0_s$, где $\mathscr{F}^0_s = \sigma\{X_r, r \leqslant s\}$.

Пример 1. Пусть X — винеровский процесс на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathbf{P})$. Тогда каждый локальный мартингал M допускает представление

$$M = M_0 + H \circ X \tag{3.22}$$

с функцией $H \in L^2_{\text{loc}}(X)$ и, следовательно, является непрерывным

Пример 2. Пусть $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ — пуассоновский процесс на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathbf{P})$. Тогда каждый локальный мартингал M допускает представление в виде (3.21).

2. Вопрос о возможности интегрального представления локальных мартингалов относительно семимартингала X, заданного на стохастическом базисе $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$, тесно связан с семимартингальной проблемой. Основной результат в этом направлении, в общих чертах, может быть сформулирован таким образом: представление (3.21) имеет место тогда и только тогда, когда мера $\mathbf{P}$ является экстремальной точкой в выпуклом множестве $S = (\mathscr{F}_0, X | \mathbf{P}_H; B, C, \nu)$ (Подробнее см. § 4 гл. III в [40] и § 8 в гл. 4, [20]).

§ 7. Устойчивость класса семимартингалов относительно ряда преобразований

1. В § 1 отмечалось, что класс семимартингалов устойчив относительно ряда преобразований, в частности, относительно абсолютно непрерывной замены меры, редукции фильтрации, случайной замены времени. Рассмотрим этот круг вопросов более подробно.

Пусть $X = (X^i)_{i \leqslant d}$ — d-мерный семимартингал, заданный на стохастическом базисе $\mathscr{B} = (\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathbf{P})$, с триплетом $T = (B, C, \nu)$. Рассмотрим новый стохастический базис $\widetilde{\mathscr{B}} = (\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}, \widetilde{\mathbf{P}})$, где $\widetilde{\mathbf{P}}$ — некоторая (новая) вероятностная мера такая, что $\widetilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P}$, т. е. $\widetilde{\mathbf{P}}$ — абсолютно непрерывна относительно $\mathbf{P}$.

Теорема 3.21. Процесс $X = (X^i)_{i \leqslant d}$, рассматриваемый на стохастическом базисе $\widetilde{\mathscr{B}} = (\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \widetilde{\mathbf{P}})$ также является семимартингалом с триплетом $\tilde{T}=(\tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{\nu})$, где

$$\tilde{B}^i=B^i+\Big(\sum_{j\leqslant d} c^{ij}\beta^j\Big)\circ A+h^i(x)(Y-1)*\nu,$$

$$\tilde{C}=C,$$

$$\tilde{\nu}=Y\nu,$$

где Y — некоторая $\tilde{\mathscr{P}}$-измеримая неотрицательная функция, $\beta=(\beta^i)_{i\leqslant d}$ — предсказуемый процесс, а c^{ij} и предсказуемый возрастающий процесс A таковы, что $C^{ij}=c^{ij}\circ A$.

2. Пусть X — семимартингал на стохастическом базисе $\mathscr{B}=(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$, $\mathscr{F}^X_{t+}=\bigcap_{\varepsilon>0}\sigma\{X_s, 0\leqslant s\leqslant t+\varepsilon\}\vee\mathscr{N}$, где $\mathscr{N}$ — система множеств из $\mathscr{F}$, имеющих $\mathbf{P}$-меру нуль, и $\mathscr{G}=(\mathscr{G}_t)_{t\geqslant 0}$ — неубывающий поток σ-алгебр, удовлетворяющих обычным условиям и такой, что

$$\mathscr{F}^X_{t+}\subseteq\mathscr{G}_t\subseteq\mathscr{F}_t, \quad t\geqslant 0.$$

Теорема 3.22. Процесс X, рассматриваемый на (редуцированном) стохастическом базисе $\tilde{B}=(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{G}=(\mathscr{G}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$ также является семимартингалом.

3. Пусть снова X — семимартингал на стохастическом базисе

$$\mathscr{B}=(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P}).$$

Определение. Случайный процесс $\hat{\tau}=(\hat{\tau}_t)_{t\geqslant 0}$, принадлежащий классу $\mathscr{V}^+$ и такой, что $\hat{\tau}_t$ — момент остановки для каждого $t\geqslant 0$, называется *случайной заменой времени*. Образуем новый процесс

$$\hat{X}_t(\omega)=X_{\hat{\tau}_t(\omega)}(\omega), \quad t\geqslant 0$$

и новый поток $\hat{\mathbf{F}}=(\hat{\mathscr{F}}_t)_{t\geqslant 0}$ с $\hat{\mathscr{F}}_t=\mathscr{F}_{\hat{\tau}_t}$.

Теорема 3.23. Процесс $\hat{X}$, рассматриваемый на стохастическом базисе $\hat{\mathscr{B}}=(\Omega, \mathscr{F}, \hat{\mathbf{F}}, \mathbf{P})$ также является семимартингалом.

III. АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ И СИНГУЛЯРНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

§ 1. Локальная плотность. Разложение Лебега

1. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{Q})$ — стохастический базис,

$$=\frac{1}{2}(\mathbf{P}'+\mathbf{P}),$$

где $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}$ — вероятностные меры на $(\Omega, \mathscr{F})$. При таком определении $\mathbf{Q}$ меры $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}$ являются абсолютно непрерывными относительно $\mathbf{Q}(\mathbf{P}'\ll\mathbf{Q},\ \mathbf{P}\ll\mathbf{Q})$. Пусть $\mathfrak{z}'=(\mathfrak{z}_t')_{t\geqslant 0}$ — опциональная проекция $d\mathbf{P}'/d\mathbf{Q}$ относительно $(\mathbf{F},\ \mathbf{Q})$, которую можно выбрать таким образом, чтобы траектории $\mathfrak{z}'$ были непрерывны справа и имели пределы слева. Выбранный таким образом процесс $\mathfrak{z}'$ является неотрицательным равномерно интегрируемым мартингалом относительно $(\mathbf{F},\ \mathbf{Q})$ и называется локальной плотностью меры $\mathbf{P}'$ относительно $\mathbf{Q}$. При этом $\mathfrak{z}_\infty'=\lim\limits_{t\to\infty}\mathfrak{z}_t'$ совпадает $\mathbf{Q}$-п. н. с $d\mathbf{P}'/d\mathbf{Q}$. Аналогичным образом определяется процесс $\mathfrak{z}=(\mathfrak{z}_t)_{t\geqslant 0}$, являющейся локальной плотностью меры $\mathbf{P}$ относительно $\mathbf{Q}$ с $\mathfrak{z}_\infty=d\mathbf{P}/d\mathbf{Q}$ ($\mathbf{Q}$-п. н.).

Для любого $t\in R_+$

$$\mathbf{Q}(\mathfrak{z}_t'=0,\ \mathfrak{z}_t=0)=0, \tag{3.23}$$

т. е. процессы $\mathfrak{z}'$ и $\mathfrak{z}$ одновременно в нуль не обращаются.

Если τ — марковский момент (предсказуемый марковский момент), то $\mathbf{P}_\tau'$ и $\mathbf{P}_\tau$ ($\mathbf{P}_{\tau-}'$ и $\mathbf{P}_{\tau-}$) — сужения $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}$ на $\mathscr{F}_\tau(\mathscr{F}_{\tau-})$.

2. Следующее разложение меры $\mathbf{P}'$ относительно $\mathbf{P}$ называется *разложением Лебега*: для любого множества $A\in\mathscr{F}_\tau$ (τ — марковский момент)

$$\mathbf{P}'(A)=\int_A(\mathfrak{z}_\tau'/\mathfrak{z}_\tau)\,d\mathbf{P}+\mathbf{P}'(A,\ \mathfrak{z}_\tau=0). \tag{3.24}$$

Если τ — предсказуемый марковский момент и $A\in\mathscr{F}_{\tau-}$, то

$$\mathbf{P}'(A)=\int_A(\mathfrak{z}_{\tau-}'/\mathfrak{z}_{\tau-})\,d\mathbf{P}+\mathbf{P}'(A,\ \mathfrak{z}_{\tau-}=0). \tag{3.25}$$

Величина $\mathfrak{z}_\tau'/\mathfrak{z}_\tau$ (соответственно $\mathfrak{z}_{\tau-}'/\mathfrak{z}_{\tau-}$ в предсказуемом случае) называется производной абсолютно непрерывной части $\mathbf{P}_\tau'(\mathbf{P}_{\tau-}')$ — относительно $\mathbf{P}_\tau(\mathbf{P}_{\tau-})$.

Определение 1. Будем говорить, что мера $\mathbf{P}'$ *локально абсолютно непрерывна* относительно $\mathbf{P}$ (и писать $\mathbf{P}'\overset{\text{loc}}{\ll}\mathbf{P}$), если для каждого $t\in R_+$ $\mathbf{P}_t'\ll\mathbf{P}_t$.

В случае $\mathbf{P}'\overset{\text{loc}}{\ll}\mathbf{P}$ свойство (3.23) процессов $\mathfrak{z}'$ и $\mathfrak{z}$ позволяет определить процесс $Z=(Z_t)_{t\geqslant 0}$ с

$$Z_t=\mathfrak{z}_t'/\mathfrak{z}_t,$$

где $Z_t=d\mathbf{P}_t'/d\mathbf{P}_t$. Так определенный процесс, называемый *процессом локальной плотности* меры $\mathbf{P}'$ относительно $\mathbf{P}$, является неотрицательным локальным мартингалом относительно $(\mathbf{F},\ \mathbf{P})$ и обладает следующим свойством: для любого марковского момента τ (предсказуемого марковского момента τ)

$$I(\tau<\infty)Z_\tau=I(\tau<\infty)\,d\mathbf{P}_\tau'/dP_\tau,$$

$$(I(\tau<\infty)Z_{\tau-}=I(\tau<\infty)\,d\mathbf{P}_{\tau-}'/dP_{\tau-}),$$

где $d\mathbf{P}_\tau'/d\mathbf{P}_\tau\,(d\mathbf{P}_{\tau-}'/d\mathbf{P}_{\tau-})$ — производная абсолютно непрерывной части $\mathbf{P}_\tau'(\mathbf{P}_{\tau-}')$ относительно $\mathbf{P}_\tau(\mathbf{P}_{\tau-})$.

В случае абсолютной непрерывности $\mathbf{P}'$ относительно $\mathbf{P}(\mathbf{P}' \ll \mathbf{P})$ процесс локальной плотности Z является равномерно интегрируемым мартингалом относительно $(\mathbf{F}, \mathbf{P})$.

§ 2. Теорема Гирсанова и ее обобщение. Преобразование предсказуемых характеристик

1. Пусть мера $\mathbf{P}'$ абсолютно непрерывна относительно $\mathbf{P}$. Предположим, что процесс локальной плотности Z, являющийся в этом случае равномерно интегрируемым мартингалом, имеет непрерывные траектории и, значит, Z — локально квадратично интегрируемый мартингал относительно $(\mathbf{F}, \mathbf{P})$.

Пусть $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ — винеровский процесс на стохастическом базисе $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$. Поскольку W — локально квадратично интегрируемый мартингал относительно $(\mathbf{F}, \mathbf{P})$, то определена взаимная квадратическая характеристика $\langle W, Z \rangle = (\langle W, Z \rangle_t)_{t \geqslant 0}$.

Следующий классический результат принадлежит Гирсанову.

Теорема 3.24. Пусть $\langle W, Z \rangle_t = \int\limits_0^t a(\omega, s)\, ds$, где $a = (a(\omega, t))_{t \geqslant 0}$ — $\mathbf{F}$-согласованный процесс такой, что $\int\limits_0^t a^2(\omega, s)\, ds < \infty$ $\mathbf{P}$ — п. н., $t > 0$.

Тогда случайный процесс $W' = (W'_t)_{t \geqslant 0}$ с

$$W'_t = W_t - \int\limits_0^t a(\omega, s)\, ds,$$

является винеровским на стохастическом базисе $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P}')$.

2. Приведем обобщение этого классического результата. Пусть $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ — вероятностные меры на $(\Omega, \mathscr{F})$ и $\mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{P}' + \mathbf{P})$. Пополнение σ-алгебры $\mathscr{F}$ и фильтрации $\mathbf{F}$ по мере $\mathbf{Q}$ будем обозначать $\mathscr{F}^{\mathbf{Q}}$ и $\mathbf{F}^{\mathbf{Q}}$ соответственно.

Теорема 3.25. Пусть $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$ — локальный мартингал относительно $(\mathbf{F}^{\mathbf{Q}}, \mathbf{P})$, мера $\mathbf{P}'$ локально абсолютно непрерывна относительно $\mathbf{P}\,(\mathbf{P}' \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P})$ и $Z = (Z_t)_{t \geqslant 0}$ — процесс локальной плотности.

Предположим, что взаимная квадратическая вариация $[M, Z] = ([M, Z]_t)_{t \geqslant 0}$ имеет локально интегрируемую вариацию по мере $\mathbf{P}$ (в этом случае у $[M, Z]$ существует компенсатор $\widetilde{[M, Z]} = (\widetilde{[M, Z]}_t)_{t \geqslant 0}$ относительно $(\mathbf{F}^{\mathbf{Q}}, \mathbf{P})$).

Тогда процесс $M'=(M'_t)_{t\geq 0}$ с

$$M'_t = M_t - I(Z_- > 0)\, Z_-^{-1} \circ \widetilde{[M, Z]}_t,$$

является локальным мартингалом относительно $(\mathrm{F}^{Q}, \mathbf{P}')$. При этом процессы $\langle M^c \rangle$ и $\langle M'^c \rangle$ являются $\mathbf{P}'$-неразличимыми, а процессы $I(Z_- > 0) \circ \langle M^c \rangle$ и $\mathrm{I}(Z_- > 0) \circ \langle M^{\,c} \rangle$ — $\mathbf{P}$-неразличимыми.

Приведем теперь результат, показывающий как изменяются компенсаторы целочисленной случайной меры при локально абсолютно непрерывной замене меры.

Пусть $\mu = \mu(dt, dx)$ — целочисленная случайная мера на $(R_+ \times E, \mathscr{B}(R_+) \otimes \mathscr{E})$ (E — пространство Блекуэлла). Компенсаторы μ относительно $(\mathrm{F}^{Q}, \mathbf{P}')$ и $(\mathrm{F}^{Q}, \mathbf{P})$ будем обозначать ν' и ν соответственно.

Пусть $\mathbf{P}' \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathbf{P}$ и $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ — процесс локальной плотности меры $\mathbf{P}'$ относительно $\mathbf{P}$.

Положим

$$Y(t, x) = Z_{t-}^{-1} I(Z_{t-} > 0)\, M_{\mu}^{\mathbf{P}}(Z \mid \widetilde{\mathscr{P}})(t, x),$$

где $M_{\mu}^{\mathbf{P}}(\cdot \mid \widetilde{\mathscr{P}})$ — условное математическое ожидание меры Долеан $M_{\mu}^{\mathbf{P}}(d\omega, dt, dx) = \mathbf{P}(d\omega)\mu(\omega; dt, dx)$ при условии σ-алгебры $\widetilde{\mathscr{P}} = \mathscr{P} \otimes \mathscr{E}$.

Теорема 3.26. Пусть $\mathbf{P}' \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathbf{P}$. Тогда

1) $\nu'(\omega; dt, dx) = Y(\omega, t, x)\nu(\omega; dt, dx)$ ($\mathbf{P}'$ — п. н.)

2) $I(Z_-(\omega) > 0)\nu'(\omega; dt, dx) = I(Z_-(\omega) > 0)\, Y(\omega, t, x)\nu(\omega; dt, dx)$ ($\mathbf{P}$-п. н.)

Теорема 3.25 и 3.26 позволяют установить, что при локально абсолютной замене меры семимартингал остается семимартингалом и вывести правило преобразования триплета предсказуемых характеристик.

Теорема 3.27. Пусть $X = X_t)_{t\geq 0}$ — семимартингал относительно $(\mathrm{F}^{Q}, \mathbf{P})$ с триплетом $T = (B, C, \nu)$ предсказуемых характеристик (с функцией урезания $h(x) = I(|x| \leq 1)$).

Если $\mathbf{P}' \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathbf{P}$, то процесс X является семимартингалом относительно $(\mathrm{F}^{Q}, \mathbf{P}')$ и его триплет $T' = (B', C', \nu')$ определяется формулами ($\mathbf{P}'$ — п. н.):

$$B' = B + \beta \circ C + I(|x| \leq 1)\, x(Y - 1) * \nu,$$

$$C' = C,$$

$$\nu' = Y\nu,$$

где

$$Y = I(Z_- > 0)\, Z_-^{-1} M_{\mu}^{\mathbf{P}}(Z \mid \widetilde{\mathscr{P}}),$$

$$\beta = I(Z_- > 0)\, Z_-^{-1} \frac{d\langle X^c, Z^c \rangle}{dC},$$

Z — процесс локальной плотности, Z^c — его непрерывная мартингальная составляющая, X^c — непрерывная мартингальная составляющая X.

3. Рассмотрим еще одну ситуацию, в которой сохраняется семимартингальное свойство при замене меры.

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ — стохастический базис и мера $\mathbf{P}$ является выпуклой комбинацией вероятностных мер $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}''$: $\alpha', \alpha'' > 0$ $\mathbf{P} = \alpha'\mathbf{P}' + \alpha''\mathbf{P}$, $\alpha' + \alpha'' = 1$. Предположим, что $X = (X_t)_{t \geq 0}$ семимартингал относительно $(\mathbf{F}, \mathbf{P}')$ и $(\mathbf{F}, \mathbf{P}'')$ с триплетами предсказуемых характеристик $T' = (B', C', \nu')$ и $T'' = (B'', C'', \nu'')$ соответственно. Поскольку $\alpha' > 0$ и $\alpha'' > 0$, то $\mathbf{P}' \ll \mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'' \ll \mathbf{P}$. Обозначим Z' и Z'' соответственно процессы локальной плотности $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}''$ относительно $\mathbf{P}$.

Теорема 3.28. Процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ является семимартингалом относительно $(\mathbf{F}, \mathbf{P})$ с триплетом $T = (B, C, \nu)$ предсказуемых характеристик, определяемым формулами:

$$B = \alpha' Z'_- \circ B' + \alpha'' Z''_- \circ B'',$$

$$C = \alpha' Z'_- \circ C' + \alpha'' Z''_- \circ C'',$$

$$\nu = \alpha' Z'_- \nu' + \alpha'' Z''_- \nu''.$$

§ 3. Интеграл Хеллингера и процесс Хеллингера

1. Пусть $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{Q}$ — вероятностные меры на $(\Omega, \mathscr{F})$, причем $\mathbf{Q}$ доминирует $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ $(\mathbf{P} \ll \mathbf{Q},\ \mathbf{P}' \ll \mathbf{Q})$. Обозначим Z и Z' производные Радона Никодима мер $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ относительно $\mathbf{Q}$:

$$Z = d\mathbf{P}/d\mathbf{Q},\quad Z' = d\mathbf{P}'/d\mathbf{Q}.$$

Определение 1. *Интегралом Хеллингера* для мер $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ называют величину

$$H(\mathbf{P}, \mathbf{P}') = \mathbf{E}^{Q} \sqrt{ZZ'},$$

где $\mathbf{E}_\mathbf{Q}$ — математическое ожидание по мере $\mathbf{Q}$.

Очевидно, что интеграл Хеллингера не зависит от доминирующей меры $\mathbf{Q}$. В связи с этим часто используется обозначение:

$$H(\mathbf{P}, \mathbf{P}') = \int_\Omega \sqrt{d\mathbf{P}\, d\mathbf{P}'}.$$

Очевидно, что $H(\mathbf{P}, \mathbf{P}') \leq 1$ и $H(\mathbf{P}, \mathbf{P}) = 1$. Кроме того,

$$\rho(\mathbf{P}, \mathbf{P}') = 1 - H(\mathbf{P}, \mathbf{P}') = \frac{1}{2}\, \mathbf{E}_\mathbf{Q} (\sqrt{Z} - \sqrt{Z'})^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\sqrt{\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}} - \sqrt{\frac{d\mathbf{P}'}{d\mathbf{Q}}} \right)^2 d\mathbf{Q}$$

не зависит от доминирующей меры $\mathbf{Q}$ и является расстоянием Какутани — Хеллингера между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$.

При изучении вопросов абсолютной непрерывности и сингулярности вероятностных мер существенную роль играет интеграл Хеллингера порядка α, определяемый следующим образом:

$$H(\alpha;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}') = \mathsf{E}_Q(Z^\alpha Z'^{1-\alpha}),\ \alpha \in (0, 1),$$

т. е. $H(\mathbf{P},\ \mathbf{P}') = H(1/2;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}')$. Также как в случае $\alpha = 1/2$ интеграл Хеллингера $H(\alpha;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}')$ не зависит от доминирующей меры $\mathbf{Q}$. В связи с этим в качестве $\mathbf{Q}$ удобно брать меру $1/2(\mathbf{P} + \mathbf{P}')$. В этом случае имеет место удобное равенство:

$$Z + Z' = 2.$$

2. Пусть вероятностные меры $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ заданы на пространстве с фильтрацией $(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbf{F})$ и $\mathbf{Q}$ — вероятностная мера на $(\Omega,\ \mathscr{F})$ такая, что

$$\mathbf{P} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{Q},\quad \mathbf{P}' \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{Q}.$$

Обозначим $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ и $Z' = (Z'_t)_{t \geq 0}$ — процессы локальной плотности мер $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ относительно $\mathbf{Q}$. Процессы Z и Z' являются мартингалами относительно $(\mathbf{F},\ \mathbf{Q})$.

Положим

$$R_n = \inf(t: Z_t < 1/n),\quad R = \lim_n R_n,\quad \Gamma = \bigcup_n [0,\ R_n],$$

$$R'_n = \inf(t: Z'_t < 1/n),\quad R' = \lim_n R'_n,\quad \Gamma' = \bigcup_n [0,\ R'_n],$$

$$S_n = R_n \wedge R'_n,\quad S = R \wedge R',\quad \Gamma'' = \Gamma \cap \Gamma' = \bigcup_n [0,\ S_n].$$

Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и $Y(\alpha) = Z^\alpha Z'^{1-\alpha}$. Процесс $Y(\alpha)$ является супермартингалом относительно $(\mathbf{F}, \mathbf{Q})$. Обозначим $h(\alpha) = (h(\alpha)_t)_{t \geq 0}$ — компенсатор $Y(\alpha)$ относительно $(\mathbf{F}, \mathbf{Q})$. Процесс $h(\alpha)$ является возрастающим предсказуемым процессом и обладает следующими свойствами:

$$h(\alpha) = I_{\Gamma''} \circ h(\alpha),$$

$$M(\alpha) = Y(\alpha) + Y(\alpha)_- \circ h(\alpha)$$

является мартингалом относительно $(\mathbf{F},\ Q)$. Если же вместо локальной абсолютной непрерывности $\mathbf{P} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{Q}$, $\mathbf{P}' \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{Q}$ имеет место абсолютная непрерывность $\mathbf{P} \ll \mathbf{Q}$, $\mathbf{P}' \ll \mathbf{Q}$, то $M(\alpha)$ — равномерно интегрируемый мартингал. Процесс $h(\alpha)$ не зависит от меры $\mathbf{Q}$ в следующем смысле: если $\bar{\mathbf{Q}}$ другая мера и $\bar{\mathbf{Q}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{Q}$ и $\bar{h}(\alpha)$ — процесс, определенный аналогично $h(\alpha)$ по мере $\bar{\mathbf{Q}}$, то процессы $h(\alpha)$ и $\bar{h}(\alpha)$ являются $\mathbf{Q}$-неразличимыми.

Определение 2. Возрастающий предсказуемый и $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ — единственный процесс $h(\alpha)$ называется *процессом Хеллингера* (в строгом смысле) *порядка* α для мер $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$. Процессом Хеллингера порядка α для мер $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ называется любой возрастающий процесс $h'(\alpha)$ такой, что процессы $I_{\Gamma''} \circ h(\alpha)$ и $I_{\Gamma''} \circ h'(\alpha)$ являются $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$-неразличимыми.

В дальнейшем, чтобы подчеркнуть роль мер $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$, для $h(\alpha)$ будет использоваться обозначение $h(\alpha;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}')$.

Поскольку процесс Хеллингера связан с процессами плотностей Z и Z' мер $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ относительно $\mathbf{Q}$, одна из его версий может быть выражена в предсказуемых терминах, связанных с процессами Z и Z'. Ради простоты формулировки будем считать, что $\mathbf{Q}=\frac{1}{2}(\mathbf{P}'+\mathbf{P})$. В этом случае

$$Z+Z'=2$$

и, значит, для представления процесса Хелингера можно ограничиться лишь предсказуемыми характеристиками процесса плотности Z.

С этой целью определим следующие объекты:

$$\varphi_\alpha(u,v)=\alpha u+(1-\alpha)v-u^\alpha v^{1-\alpha},$$

Z^c — непрерывная мартингальная составляющая процесса плотности Z,
$\nu^z(dt,dx)$ — компенсатор меры скачков Z.

Теорема 3.29. Пусть $\mathbf{Q}=\frac{1}{2}(\mathbf{P}'+\mathbf{P})$. Тогда процесс Хеллингера порядка α в строгом смысле задается формулой:

$$h(\alpha;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}')=\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\left(\frac{1}{Z_-}+\frac{1}{2-Z_-}\right)\circ\langle Z^c\rangle+$$
$$+\varphi_\alpha(1+x/Z_-,\ 1+x/(2-Z_-))*\nu^Z.$$

При $\mathbf{Q}=\frac{1}{2}(\mathbf{P}'+\mathbf{P})$ можно рассматривать процесс Хеллингера $h(0;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}')$.

Определение 3. *Процессом Хеллингера порядка нуль* для мер $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ называется процесс

$$h(0;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}')=\left(1-\frac{x}{2-Z_-}\right)\psi\left(\frac{1+x/Z_-}{1-x/(2-Z_-)}\right)*\nu^Z,$$

где

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x>0,\end{cases}$$

Z — процесс плотности $\mathbf{P}$ относительно $\mathbf{Q}$, ν^z — компенсатор

Процесс Хеллингера порядка нуль (в строгом смысле) называется такая версия $h(0;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}')$, для которой $h(0;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}')=I_{\Gamma''}\circ h(0;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}')$ (с точностью до $\mathbf{Q}$—неразличимости).

В случае дискретного времени процесс Хеллингера выражается достаточно просто. Пусть $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0})$ — измеримое пространство с дискретной фильтрацией и $Z=(Z_n)_{n\geqslant 0}$, $Z'=(Z_n')_{\geqslant 0}$ — процессы локальной плотности мер $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ относительно $\mathbf{\Omega}$.

Обозначим

$$\beta_n = Z_n / Z_{n-1}, \quad \beta'_n = Z'_n / Z'_{n-1}$$

(полагая $0/0=0$ и имея в виду тот факт, что $Z_n=0$, если $Z_{n-1}=0$). Тогда процесс Хеллингера $h(\alpha;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}')=$ $=(h_n(\alpha;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}')_n)_{n\geqslant 1}$ задается формулами:

$$h(\alpha;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}')_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}_{\mathbf{Q}}(1-\beta_k^{\alpha}\beta_k'^{\,1-\alpha} \mid \mathscr{F}_{k-1})$$

или

$$h(\alpha;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}')_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}_{\mathbf{Q}}(\varphi_\alpha(\beta_k,\ \beta'_k) \mid \mathscr{F}_{k-1}).$$

В заключение этого параграфа отметим, что в случае локальной абсолютной непрерывности $\mathbf{P}' \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathbf{P}$ процесс Хеллингера определяется следующим образом:

$$h(\alpha;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}') = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\,\frac{1}{Z_-^2}\circ\langle Z^c\rangle +$$

$$+\{\alpha+(1-\alpha)(1+x/Z_-)-(1+x/Z_-)^{1-\alpha}\}*\nu^Z, \quad \alpha\in(0,\ 1),$$

где Z — процесс локальной плотности $\mathbf{P}'$ относительно $\mathbf{P}$, $\langle Z^c\rangle$ — квадратическая характеристика непрерывной мартингальной составляющей Z, ν^Z — компенсатор меры скачков Z.

В частности,

$$h\left(\frac{1}{2};\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}'\right) = \frac{1}{8Z_-^2}\circ\langle Z^c\rangle + \frac{1}{2}\{1-\sqrt{1+x/Z_-}\}^2*\nu^Z.$$

При $\alpha=0$

$$h(0;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}') = (1+x/Z_-)\,\psi\left(\frac{1}{1+x/Z_-}\right)*\nu^Z,$$

где

$$\psi(x) = I(x=0).$$

§ 4. Общие и предсказуемые критерии абсолютной непрерывности и сингулярности вероятностных мер

1. Пусть $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ — вероятностные меры на $(\Omega, \mathscr{F})$ и $\mathbf{Q}$ — вероятностная мера на этом же измеримом пространстве такая, что $\mathbf{P}\ll\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}'\ll\mathbf{Q}$. Обозначим $\mathfrak{z}=d\mathbf{P}/d\mathbf{Q}$ и $\mathfrak{z}'=d\mathbf{P}'/d\mathbf{Q}$. В силу разложения Лебега (см. (3.24) и для любого множества A

$$\mathbf{P}'(A) = \int_A \mathfrak{z}'/\mathfrak{z}\,d\mathbf{P} + \mathbf{P}'(A,\ \mathfrak{z}=0).$$

Отсюда легко выводятся критерии абсолютной непрерывности и сингулярности мер $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$. А именно,

$$\mathbf{P}' \ll \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{P}'(\mathfrak{z} > 0) = 1,$$

$$\mathbf{P}' \perp \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{P}'(\mathfrak{z} > 0) = 0.$$

Можно дать критерии абсолютной непрерывности и сингулярности мер $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ в терминах интеграла Хеллингера $H(\alpha; \mathbf{P}, \mathbf{P}')$ порядка α.

Теорема 3.30. a) Следующие условия эквивалентны:

$$(i)\ \ \mathbf{P}' \ll \mathbf{P},$$

$$(ii)\ \ \mathbf{P}'(\mathfrak{z} > 0) = 1,$$

$$(iii)\ \ H(\alpha;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}') \to 1,\ \alpha \downarrow 0.$$

b) Следующие условия эквивалентны:

$$(i)\ \ \mathbf{P}' \perp \mathbf{P},$$

$$(ii)\ \ \mathbf{P}'(\mathfrak{z} > 0) = 0,$$

$$(iii)\ \ H(\alpha;\ \mathbf{P}',\ \mathbf{P}) \to 0,\ \alpha \downarrow 0,$$

$$(iv)\ \ H(\alpha;\ \mathbf{P}',\ \mathbf{P}) = 0 \text{ для всех } \alpha \in (0, 1),$$

$$(v)\ \ H(\alpha;\ \mathbf{P}',\ \mathbf{P}) = 0 \text{ для некоторого } \alpha \in (0, 1).$$

2. При исследовании условий абсолютной непрерывности и сингулярности мер, отвечающих семимартингалам, существенную роль играют, так называемые, предсказуемые критерии. С помощью этих критериев условия абсолютной непрерывности и сингулярности формулируются в терминах триплетов предсказуемых характеристик.

Теорема 3.31. Пусть задан стохастический базис $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathbf{Q})$, $\mathscr{F} = \mathscr{F}_{\infty-}$, $\mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{P}' + \mathbf{P})$ и $h(\alpha; \mathbf{P}, \mathbf{P}')$ — процесс Хеллингера порядка $\alpha \in (\alpha \in [0, 1))$, T — марковский момент.

Следующие условия эквивалентны:

(i) $\mathbf{P}'_T \ll \mathbf{P}_T$,

(ii) $\mathbf{P}'_0 \ll \mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}'(h(1/2; \mathbf{P}, \mathbf{P}')_T < \infty) = 1$, $\mathbf{P}'(h(0; \mathbf{P}, \mathbf{P}')_T = 0) = 1$,

(iii) $\mathbf{P}'_0 \ll \mathbf{P}_0$ и $h(\alpha; \mathbf{P}', \mathbf{P}) \xrightarrow[\text{loc}]{\mathbf{P}'} 0$, $\alpha \downarrow 0$ (где «$\xrightarrow{\mathbf{P}'}$» означает сходимость по $\mathbf{P}'$-вероятности).

Следствие. Если $\mathbf{P}' \ll \mathbf{P}$, то для абсолютной непрерывности $\mathbf{P}' \ll \mathbf{P}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbf{P}'(h(1/2; \mathbf{P}, \mathbf{P}')_\infty < \infty) = 1.$$

Замечание. В формулировках теоремы и следствия $h(1/2; \mathbf{P}, \mathbf{P}')$ можно заменить на $h(\beta; \mathbf{P}, \mathbf{P}')$ при любом $\beta \in (0,1)$.

Для формулировки результатов, связанных с сингулярностью мер $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$, определим следующие объекты.

Пусть Z и Z' — процессы плотности мер $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ относительно $\mathbf{Q}$. Обозначим

$$G_0 = \{Z_0 > 0,\ Z_0' > 0\},$$

$$C_T = G_0 \cap \{h(1/2;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}')_T < \infty\} \cap \{h(0;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}')_T = 0\},$$

$$\tilde{G}_T = G_0 \cap \{\limsup_{\alpha \downarrow 0} h(\alpha;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}^\alpha)_T = 0\},$$

где T — марковский момент и на множестве $\{T=0\}$ $G_T = \tilde{G}_T = G_0$.

Теорема 3.32. Пусть объекты, участвующие в этой теореме, такие же, как в теореме 3.31.

(а) Имеет место импликация:

$$\mathbf{P}_T' \perp \mathbf{P}_T \Rightarrow \mathbf{P}'(G_T) = 0 \text{ и } \mathbf{P}'\left(\tilde{G}_T\right)$$

в) Если выполнено хотя бы одно из условий: $\mathbf{P}_0' \perp P_0$ или $\mathbf{P}'(h(1/2;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}')_T < \infty) = 0$, то

$$\mathbf{P}_T' \perp \mathbf{P}_T.$$

Следствие. Пусть $\mathbf{P}' \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}$. Тогда для сингулярности мер $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}' \perp \mathbf{P}$) необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbf{P}'(h(1/2;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}')_\infty < \infty) = 0.$$

§ 5. Частные случаи

В этом параграфе реализуются результаты, сформулированные в теоремах 3.31 и 3.32 и следствием к ним, для ряда частных случаев, которым отвечают распределения некоторых случайных процессов.

На протяжении этого параграфа будем считать, что случайный процесс X определен на стохастическом базисе $\left(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbf{F},\ \frac{1}{2}(\mathbf{P}' + \mathbf{P})\right)$, где $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}$ — вероятностные меры, $\mathbf{F}\text{-}\mathbf{F}_+^{1/2(\mathbf{P}'+\mathbf{P})}(X)$, $\mathscr{F} = \mathscr{F}_{\infty-}^{1/2(\mathbf{P}'+\mathbf{P})}$.

1. Дискретное время. Пусть $(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbf{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0})$-измеримое пространство с дискретной фильтрацией $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$. Сужения $\mathbf{P}_n$ и $\mathbf{P}_n'$ мер $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ на σ-алгебру $\mathscr{F}_n$ можно трактовать как распределение случайных последовательностей $(\xi_0,\ \xi_1, \ldots,\ \xi_n)$ и $(\xi_0',\ \xi_1', \ldots,\ \xi_n')$. Предположим, что при каждом $n \geqslant 0$ $\mathbf{P}_n' \ll \mathbf{P}_n$, т. е. $\mathbf{P}' \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}$. В этом случае

$$h(1/2;\ \mathbf{P},\ \mathbf{P}')_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \mathbf{E}\left[\left(1 - \sqrt{\beta_k}\right)^2 \middle| \mathscr{F}_{k-1}\right],$$

где $\beta_k = Z_k/Z_{k-1}$, $Z_k = d\mathbf{P}'_k/d\mathbf{P}_k$ и значит, в силу следствий к теоремам 3.31 и 3.32

$$\mathbf{P}' \ll \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{P}'\left(\sum_{k\geq 0} \mathbf{E}\left[(1-\sqrt{\beta_k})^2 \mid \mathscr{F}_{k-1}\right] < \infty\right) = 1,$$

$$\mathbf{P}' \perp \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{P}'\left(\sum_{k\geq 0} \mathbf{E}\left[(1-\sqrt{\beta_k})^2 \mid \mathscr{F}_{k-1}\right] < \infty\right) = 0.$$

2. **Точечный процесс.** Пусть семимартингал X является точечным процессом с компенсаторами A и A' относительно мер $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ — соответственно.

Из теорем 3.31 и 3.32 вытекают такие результаты.

Теорема 3.33. Для абсолютной непрерывности $\mathbf{P}' \ll \mathbf{P}$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) существует неотрицательный предсказуемый процесс такой, что

$$A' = \lambda \circ A,$$

$$2)\ \ \Delta A_t = 1 \Rightarrow \Delta A'_t = \lambda_t \Delta A_t = 1,$$

$$3)\ \ \mathbf{P}'\left((1-\sqrt{\lambda})\circ A_\infty + \sum_{t>0} (\sqrt{1-\Delta A_t} - \sqrt{1-\Delta A'_t})^2 < \infty\right) = 1.$$

Теорема 3.34. При выполнении условия 1) теоремы 3.33 и условия

$$\mathbf{P}'\left((1-\sqrt{\lambda})^2\circ A_\infty + \sum_{t>0} (\sqrt{1-\Delta A_t} - \sqrt{1-\Delta A'_t})^2 < \infty\right) = 0$$

меры $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}$ сингулярны: $\mathbf{P}' \perp \mathbf{P}$.

3. **Семимартингал с гауссовской мартингальной частью.** Будем считать, что семимартингал X с $X_0 = 0$ допускает представление:

$$X = A + M' \quad \mathbf{P}'\text{-п. н.}$$

$$X = M \quad \mathbf{P}\text{-п. н.},$$

где A — предсказуемый процесс конечной вариации на каждом конечном интервале, M' и M гауссовские мартингалы относительно $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}$ соответственно.

Отметим, что в силу гауссовости процессов M' и M

$$\langle M \rangle_t = \mathbf{E} M_t^2, \quad \langle M^c \rangle_t = \langle M \rangle_t^c, \quad \langle M^d \rangle_t = \langle M \rangle_t^d,$$

где $\mathbf{E}$ — математическое ожидание по мере $\mathbf{P}$ (квадратические характеристики M' определяются аналогично с заменой $\mathbf{E}$ на $\mathbf{E}'$ — математическое ожидание по мере $\mathbf{P}'$).

Теорема 3.35. Для абсолютной непрерывности $\mathbf{P}' \ll \mathbf{P}$ необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1) существуют предсказуемые процессы $\gamma=(\gamma_t)_{t\geqslant 0}$ и $\rho=(\rho_t)_{t\geqslant 0}(\rho\geqslant 0)$ такие, что

$$A=\gamma\circ\langle M\rangle,\ \langle M'\rangle^d=\rho\circ\langle M\rangle^d,\ \langle M\rangle^d=\rho^{-1}\circ\langle M'\rangle^d,$$

$$2)\ \langle M\rangle^c=\langle M'\rangle^c,$$

$$3)\ \mathbf{P}'\left(\gamma_0^2\langle M'\rangle_\infty+\sum_{t>0}I(\Delta\langle M\rangle_t>0)(1-\rho_t)^2<\infty\right)=1.$$

Если вместо условия 3) выполнено условие

$$3')\ \mathbf{P}'\left((\gamma_0^2\langle M'\rangle_\infty+\sum_{t>0}I(\Delta\langle M\rangle_t>0)(1-\rho_t)^2<\infty\right)=0,$$

то $\mathbf{P}'\perp\mathbf{P}$.

Пример. Пусть относительно меры $\mathbf{P}'$ X является решением стохастического уравнения Ито

$$dX_t=a(t,X_t)\,dt+dW_t,\ X_0=0$$

относительно винеровского процесса $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ и $\mathbf{P}$ — винеровская мера. Тогда $\mathbf{P}'\ll\mathbf{P}$ если и только, если

$$\int_0^\infty a^2(t,\ X_t)dt<\infty\ \mathbf{P}'\text{-п. н.}$$

В том случае, когда $\int_0^T a^2(t,\ X_t)\,dt<\infty$ $\mathbf{P}'$-п. н., где T — марковский момент, $\mathbf{P}_T'\ll\mathbf{P}_T$.

4. Процессы с независимыми приращениями. Семимартингал X является процессом с независимыми приращениями и триплетами предсказуемых характеристик $T=(B,C,\nu)$ и $T'=(B',C',\nu')$ относительно $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ соответственно. В силу того, что X — процесс с независимыми приращениями триплеты T и T' являются детерминированными. Обозначим

$$a_t=\nu(\{t\}\times R\setminus\{0\}),\ a_t'=\nu'(\{t\}\times R\setminus\{0\}.$$

Из теоремы 3.31 вытекает такой результат.

Теорема 3.36. Для абсолютной непрерывности $\mathbf{P}'\ll\mathbf{P}$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) $\mathbf{P}_0'\ll\mathbf{P}_0$ ($\mathbf{P}_0'$ и $\mathbf{P}_0$ — сужения $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}$ на σ-алгебру $\mathcal{F}_0$),

2) существует неотрицательная измеримая детерминированная функция $Y=Y(t,x)$ такая, что

$$\nu'(dt,dx)=Y(t,x)\nu(dt,dx),$$

3) $a_t=1\Rightarrow a_t'=1$,

4) $I(|x|\leqslant 1)|x(Y-1)|*\nu_t<\infty,\ \forall t>0$,

5) существует измеримая детерминированная функция $\beta=(\beta_t)_{t\geqslant 0}$ такая, что $\beta^2\circ C_t<\infty,\ \forall t>0$ и

$$B'=B+\beta\circ C+I(|x|\leqslant 1)x(Y-1)*\nu,$$

6) $C=C'$,

7) $\beta^2\circ C_\infty+(1-\sqrt{Y})^2*\nu_\infty+\sum_{t>0}(\sqrt{1-a_t}-\sqrt{1-a_t'})^2<\infty$.

Замечание. Если выполнены условия 1)—6) и условие
$$L_t=\beta_0^2C_t+(1-\sqrt{Y})^2*\nu_t+\sum_{s\leqslant t}(\sqrt{1-a_s}-\sqrt{1-a_s'})^2<\infty,\ \forall t>0,$$
то
$$\mathbf{P}'\perp\mathbf{P}\Leftrightarrow L_\infty=\infty.$$

5. Марковские процессы со счетным множеством состояний. Пусть $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ принимает значения в множестве $J=(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$ и является марковским процессом относительно $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ с матрицами интенсивностей переходов $\|\lambda_{\alpha\beta}(t)\|$ и $\|\lambda_{\alpha\beta}'(t)\|$, соответственно, где $\lambda_{\alpha\beta}(t)$ и $\lambda_{\alpha\beta}'(t)$ — измеримые функции, обладающие следующими свойствами:
$$\sum_{\beta\in J}\lambda_{\alpha\beta}(t)=0,\ \sum_{\beta\in J}\lambda_{\alpha\beta}'(t)=0,\ \alpha\in J,$$
$$\int_0^t\sup_\alpha|\lambda_{\alpha\alpha}(s)|\,ds<\infty,\quad \int_0^t\sup_\alpha|\lambda_{\alpha\alpha}'(s)|\,ds<\infty,\quad t>0.$$

Определим случайные процессы $X_\beta=(X_\beta(t))_{t\geqslant 0}$, $\beta\in J$ с
$$X_\beta(t)=I(X_t=\beta).$$

Процесс X_β является семимартингалом относительно $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ с разложениями относительно $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$:
$$X_\beta(t)=X_\beta(0)+\int_0^t\lambda_{X_s,\beta}(s)\,ds+M_\beta(t),$$
$$X_\beta(t)=X_\beta(0)+\int_0^t\lambda_{X_s,\beta}'(s)\,ds+M_\beta'(t),$$
где $M_\beta=(M_\beta(t))_{t\geqslant 0}$ и $M_\beta'=(M_\beta'(t))_{t\geqslant 0}$ — квадратично интегрируемые мартингалы (относительно $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$).

Используя эти разложения, теорему 3.31 и следствие к ней получаем следующий результат.

Теорема 3.37. *Для абсолютной непрерывности* $\mathbf{P}'\ll\mathbf{P}$ *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

a) $\mathbf{P}(X_0=\alpha)=0\Rightarrow\mathbf{P}'(X_0=\alpha)=0,\quad \forall\alpha\in J$,

b) $\int_0^t I(X_s=\alpha)\lambda_{\alpha\beta}'(s)\,ds=\int_0^t I(X_s=\alpha)\lambda_{\alpha\beta}'(s)I(\lambda_{\alpha\beta}(s)>0)\,ds$,

$\mathbf{P}$-п. н., $t>0$, $\alpha,\beta\in J$,

$$\text{c)}\ \mathbf{P}'\left(\int_0^\infty \sum_{\alpha\neq\beta}\left(1-\sqrt{\frac{\lambda'_{\alpha\beta}(s)}{\lambda_{\alpha\beta}(s)}I(\lambda_{\alpha\beta}(s)>0)}\right)^2 I(X_s=\alpha)\times\right.$$
$$\left.\times\lambda_{\alpha\beta}(s)\,ds<\infty\right)=1.$$

6. Семимартингалы с условием локальной единственности. Будем считать, что $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ — семимартингал относительно $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ с триплетами предсказуемых характеристик $T=(B, C, \nu)$ и $T'=(B', C', \nu')$.

Теорема 3.38 (ср. с теоремой 3.35). Для абсолютной непрерывности $\mathbf{P}'\ll\mathbf{P}$ достаточно выполнение условий:

$$1)\ \mathbf{P}_0'\ll\mathbf{P}_0,$$

2) существует неотрицательная $\tilde{\mathscr{P}}$-измеримая функция $Y=Y(\omega, t, x)$ такая, что

$$\nu'(\omega; dt, dx)=Y(\omega, t, x)\nu(\omega; dt, dx)\ \ \mathbf{P}'\text{-п. н.},$$

3)

$$\nu(\{t\}\times R\setminus\{0\})=1\Rightarrow\nu'(\{t\}\times R\setminus\{0\})=1\ \ \mathbf{P}'\text{-п. н.},$$

$$4)\ I(|x|\leqslant 1)\,|x(Y-1)|*\nu_t<\infty\ \ \mathbf{P}'\text{-п. н.},\ t>0,$$

5) существует $\mathscr{P}$-измеримая функция $\beta=\beta(\omega, t)$ такая, что

$$\beta^2\circ C_t<\infty\ \ \mathbf{P}'\text{-п. н.},\ t>0$$

и

$$B'=B+\beta\circ C+I(|x|\leqslant 1)\,x(Y-1)*\nu\ \ \mathbf{P}'\text{-п. н.},$$

$$6)\ C=C',$$

$$7)\ \mathbf{P}'\left(\beta^2\circ C_\infty+(1-\sqrt{Y})^2*\nu_\infty+\sum_{t>0}\left(\sqrt{1-a_t}-\sqrt{1-a_t'}\right)^2<\infty\right)=1,$$

8) мартингальная проблема $\mathscr{S}(\mathscr{F}_0, X\,|\,\mathbf{P}_0'; B', C', \nu')$ обладает свойством локальной единственности для меры $\mathbf{P}'$.

Абсолютная непрерывность $\mathbf{P}'\ll\mathbf{P}$ влечет за собой выполнение условий 1)—7) (см. [15] и [40]).

КОММЕНТАРИЙ К ГЛАВЕ 3

I. § 1. Аксиоматика Колмогорова изложена в его книгах [17], [18]. После введения колмогоровской аксиоматики следующим важным шагом в развитии стохастического исчисления было введение фильтрации (потока σ-алгебр), что позволило точнее учитывать структуру стохастических объектов и получать более глубокие результаты. Начало этому исследованию положил Дуб [13].

§ 2. Излагаемый здесь материал составляет основу общей теории случайных процессов и базируется главным образом на результатах страсбургской школы вероятностников (Мейер, Деллашери, Долеан-Дэд ...). Приведенный здесь материал заимствован из книг: Мейер [21], Деллашери и Мейер [26]—[28], Деллашери [12], Жакод [38], Метивье [48], Эллиот [30], И. И. Гихман, А. В. Скороход [4].

§ 3. Понятие локального мартингала введено в работе Ито и Ватанабэ [35].

§ 4. Возрастающие процессы в качестве важного и самостоятельного класса систематически рассматривались в монографиях Деллашери [12], Мейера [21]. По поводу разложения Дуба—Мейера см. Мейер [21], Деллашери и Мейер [26].

§ 5. Изложение теории случайных мер и их компенсаторов следует здесь в основном схеме, предложенной Жакодом [36], см. также Жакод [38], Жакод, А. Н. Ширяев [40], Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев [20], Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев [45], Ю. М. Кабанов, Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев [14].

§ 6. Роль квадратично интегрируемого мартингала в теории мартингалов во многом прояснена в работе Куниты и Ватанабе [42], см. также Деллашери и Мейер [26]. Квадратическая характеристика локального мартингала введена Мейером [49], взаимная квадратическая характеристика — Кунитой и Ватанабэ [42].

§ 7. Первое разложение локального мартингала в случае дискретного времени носит название «разложение Ганди». Второе разложение и его свойства установлены Мейером [50], см. также Жакод [38].

11. § 1. Семимартингалы в качестве самостоятельного класса были введены Долеан-Дэд и Мейером [29], а специальные семимартингалы — Йорном [56] и Мейером [50]. Полное изложение теории семимартингалов можно найти в книгах Деллашери, Мейера [26]—[28], Жакода [38], Метивье [48], Эллиота [30], И. И. Гихмана, А. В. Скорохода [4], Жакода, А. Н. Ширяева [40], Р. Ш. Липцера, А. Н. Ширяева [20]. Квадратическая вариация локального мартингала введена Мейером [50]. Сведения о квадратической вариации семимартингала содержатся у Деллашери, Мейера [26]—[28], Эллиота [30], Жакода, А. Н. Ширяева [40], Р. Ш. Липцера, А. Н. Ширяева [20]. Понятие квазимартингала введено Фиском [31], Ори [52], см. также Метивье [48], Жакод [38], Рао [53], Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев [20].

§ 2. Первая конструкция стохастического интеграла по винеровскому процессу от детерминированных подинтегральных функций дана в 1923 г. Н. Винером. Общее определение стохастического интеграла по винеровскому процессу принадлежит Ито [33]. Интегрирование по квадратично интегрируемым мартингалам рассматривалось Дубом [13], Мейером [50], Куррежем [23], Кунитой и Ватанабэ [42]. Конструкция стохастического интеграла по локальному мартингалу дана у Жакода [38], Долеан-Дэд и Мейера [29], Мейера [50], см. также Метивье [48], Деллашери, Мейера [27], Эллиот [30], Жакод, А. Н. Ширяев [40], Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев [20].

§ 3. Формула Ито установлена в работе [34] в случае семимартингала диффузионного типа. По поводу формулы Ито для семимартингала общего вида см. Деллашери, Мейер [27], И. И. Гихман, А. В. Скороход [4], Эллиот [30].

§ 4. Конструкция стохастического интеграла по целочисленной случайной мартингальной мере дана Ю. М. Кабановым, Р. Ш. Липцером, А. Н. Ширяевым [15], Жакодом [38], Р. Ш. Липцером, А. Н. Ширяевым [20].

§ 5. Триплеты предсказуемых характеристик для локально безгранично делимых процессов введены Б. И. Григелионисом [6], [10], [11]. Систематически триплеты рассматривались Жакодом и Мемэном [39], Ю. М. Кабановым, Р. Ш. Липцером, А. Н. Ширяевым [15] в связи с вопросами абсолютно непрерывной замены меры. По поводу канонического представления см. Деллашери, Мейер [27], Жакод [38], Жакод, А. Н. Ширяев [40], Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев [20]; по поводу проблемы мартингалов см. Жакод, А. Н. Ширяев [40].

§ 6. См. А. Д. Вентцель [2], Кунита, Ватанабэ [42], Деллашери [24], Б. И. Григелионис [9], Р. Ш. Липцер [19], Жакод [37], Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев [20].

§ 7. Сохранение семимартингального свойства при абсолютно непрерывной замене меры впервые установлено И. В. Гирсановым [3], см. также Б. И. Григелионис [5], [7], Ю. М. Кабанов, Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев [15], Жакод, Мемэн [39], Жакод, А. Н. Ширяев [40], Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев [20]. Сохранение семимартингального свойства при случайной замене меры изложено Деллашери, Мейером [26], Жакодом [38]. В наибольшей общности сохранение семимартингального свойства при редукции фильтрации изложено у Стрикера [54], см. также Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев [20].

III. § 1. Понятие локальной абсолютной непрерывности и локальной плотности введено в работе Ю. М. Кабанова, Р. Ш. Липцера, А. Н. Ширяева [15].

§ 2. Теорема И. В. Гирсанова имеется в работе [3]. Ее обобщение принадлежит Ван Шуппену и Вонгу [55]. Преобразование предсказуемых характеристик при абсолютно непрерывной замене меры дано Б. И. Григелионисом [5], [7], [8], Ю. М. Кабановым, Р. Ш. Липцером, А. Н. Ширяевым [15], Жакодом, Мемэном [39], Жакодом, А. М. Ширяевым [40], Ю. М. Липцером, А. М. Ширяевым [20].

§ 3. Интеграл Хеллингера используется при решении вопроса об абсолютной непрерывности и сингулярности; см. Какутани [41], Лизе [43], [44]. Процесс Хеллингера введен Р. Ш. Липцером, А. Н. Ширяевым [46].

§ 4. См. Жакод, А. Н. Ширяев [40], Ю. М. Кабанов, Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев [15], Жакод, А. Н. Ширяев [20].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бернштейн С. Н.* Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей // Сообщ. Харьк. мат. об-ва.— 1917.— *15*.— С. 209—274
2. *Вентцель А. Д.* Аддитивные функционалы от многомерного винеровского процесса // Докл. АН СССР.— 1961.— *139*, № 1.— С. 13—16
3. *Гирсанов И. В.* О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры // Теория вероятностей и ее применения.— 1960.— *3*.— С. 314—330
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев: Наукова Думка, 1982.— 612 с.
5. *Григелионис Б. И.* Об абсолютно непрерывной замене меры и марковском свойстве случайных процессов // Лит. мат. сб.— 1969.— *9*, № 1.— С. 57—71
6. — О представлении целочисленных случайных мер как стохастических интегралов по пуассоновской мере // Лит. мат. сб.— 1971.— *11*, № 3.— С. 93—108
7. — Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих случайным процессам // Лит. мат. сб.— 1971.— № 3.— С. 783—794.
8. — О структуре плотности мер, соответствующих случайным процессам // Лит. мат. сб.— 1973.— *13*, № 1.— С. 71—78
9. — О представлении стохастическими интегралами мартингалов, интегрируемых с квадратом // Лит. мат. сб.— 1974.— *14*, № 3.— С. 53—69
10. — Случайные точечные процессы и мартингалы // Лит. мат. сб.— 1975.— *15*, № 3.— С. 101—114
11. — Характеризация случайных процессов // Лит. мат. сб.— 1975.— *15*, № 4.— С. 53—58
12. *Деллашери К.* Емкости и случайные процессы.— М.: Мир, 1975.— 192 с.
13. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы (перев. с англ.).— М.: ИЛ, 1956.— 605 с.
14. *Кабанов Ю. М., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Мартингальные методы в теории точечных процессов // Тр. школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай, 1974.).— Вильнюс, 1975. Ч. 2.— С. 269—354
15. —, —, — Абсолютная непрерывность и сингулярность локально абсолютно непрерывных вероятностных распределений. I; II // Мат. сб.— 1978.— *107 (149)*, № 3.— С. 364—415; 1979.— *108 (150)*, № 1.— С. 32—61
16. *Колмогоров А. Н.* Общая теория меры и исчисление вероятностей // Тр. Коммунистич. академии, разд. Математика.— 1929.— *1*.— С. 8—21
17. — Основные понятия теории вероятностей // ОНТИ, 1936 (немецкое издание, 1933)

18. — Основные понятия теории вероятностей.— М.: Наука, 1974
19. *Липцер Р. Ш.* О представлении локальных мартингалов // Теория вероятностей и ее применения.— 1976.— *XXI*, № 4.— С. 718—726.
20. —, *Ширяев А. Н.* Теория мартингалов.— М.: Наука, 1986.— 512 с.
21. *Мейер П. А.* Вероятность и потенциалы.— М.: Мир, 1973.— 323 с.
22. *Bohlmann G.* Die Grundbergriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebenversicherung // Atti del IV Condresso internazionale dei Mathematici, Roma.— 1908.— *III*. Sec. 116—1909
23. *Courrège Ph.* Integrales stochastiques associeès a une martingale de carrè integrable // CRAS. Paris.— 1963.— *256*.— C. 867—870
24. *Dellacherie C.* Integrales stochastiques par rapport aux processus de Wiener ou de Poisson // Sémin. probab. Lect. Notes. Math.— 1974.— *381*.— C. 25—26 (Correction; Lect. Notes Math.— 1975.— *465*.— C. 494)
25. — Un survol de la theorie de l'integrale stochastique // Stochast. Proc. Appl.— 1980.— *10*.— C. 115—144
26. —, *Meyer P.* Probabilites et potentiel. *I*.— Paris: Hermann, 1975.— 291 c.
27. —, — Probabilities et potentiel. *II*.— Paris: Hermann, 1980.— 476 c.
28. —, — Probabilites et potentiel. *III*.— Paris: Hermann, 1983 — 229 c.
29. *Doleans-Dade C., Meyer P. A.* Integrales stochastiques par rapport aux martingales locales // Lect. Notes Math.— *124*. Semin. probab. IV.— 1970, C. 77—107
30. *Elliott R. J.* Stochastic calculus and applications.— N. Y. etc.: Springer—Verlag, 1982.— 302 c.
31. *Fisk D. L.* Quasimartingales // Trans. AMS.— 1965.— *20*.— C. 369—389
32. *Hilbert D.* Archiv f. Math. u Phys., III.— *1*.— 1901.— C 44—63, 213—237
33. *Ito K.* Stochastic integral // Proc. Imp. Acad. Tokyo.— 1944.— *20*.— C. 519—524
34. — On a formula concerning stochastic differentials // Nagoya Math. J.— 1951.— *3*.— C. 55—65
35. —, *Vatanabe S.* Transformation of Markov processes by multiplicative functionals. // Ann. Inst. Fourier.— 1965.— *15*.— C. 15—30
36. *Jacod J.* Multivariate point processes: predictable projection, Radon Nikodym derivatives, representation of martingales. // Z. Warsch. verw. Geb.— 1975, B. *31*.— C. 235—253
37. — A general theorem of representation for martingales // Proc. Symp. in Pure Math.— 1977.— *31*.— C. 101—104
38. — Calcul stochastique et problemes de martingales.— Lect. Notes Math.— 1979.— *714*.— 539 c.
39. —, *Mèmin J.* Caracteristique locales et conditions de continuité absolue pour les semimartingales // Z. Wahseh. verw. Geb.— 1976.— B. *36*.— C. 1—37
40. —, *Shiryayev A. N.* Limit Theorems for Stochastic Processes // Springer—Verlag, 1987.— 600 c.
41. *Kakutani S.* On equivalence of infinite product measures // Ann. Math.— 1948.— 49.— C. 214—224
42. *Kunita H., Watanabe S.* On square integrable martingales // Nagoya Math. J.— 1967.— 30.— C. 209—245
43. *Liese F.* Hellinger integrales of Gaussian processes with independent increments // Stochastics.— 1982.— 6.— C. 81—96
44. — Hellinger integrals of diffusion processes // Forshungsergeb. Friedrich-Schiller-Univ.— 1983.— Jena N/83/89
45. *Liptser R. Sh., Shiryayev A. N.* Statistics of random processes. II. Applications.— Ney-York: Springer—Verlag, 1978.— 339 c.
46. —, — On the problem of «predictable» criteria of contiguity // Proc. 5th Japan—USSR Symp. Lect. Notes Math.— N.-Y. etc.: Springer—Verlag, 1983.— *1021*.— C. 384—418
47. *Lomnicki A.* Nonveaux fondement du calcul des probabilitès // Fundam. math.— 1923.— *4*.— C. 34—71
48. *Métivier M.* Semimartingales.— Berlin, New York: Walter de Cruyter, 1982.— 287 c.

49. *Meyer P. A.* A decomposition theorem for supermartingales // Ill. J. Math.— 1962.— 7.— C. 1—17
50. — Integrales stochastique I—IV // Sèmin. probab. I.— Berlin etc.: Lect. Notes Math.— 1967.— *39*.— C. 72—162
51. *von Mises R*. Grundlage der Wahrscheinlichkeits rechnung // Math. Z.— 1919.— *5*.— C. 52—99
52. *Orey S.* *F*-processes // Proc. Fifth Berkeley Symp.— 2.— Berkeley: Univ. of California Press.— 1965.— C. 301—313
53. *Rao K. M.* Quasimartingales // Math. scand.— 1969.— *24*.— C. 79—92
54. *Stricker C.* Quasimartingales, martingales locales, semimartingales et filtration naturelle // Z. Wahrsch. verw. Geb.— 1977.— *39*.— C. 55—63
55. *Van Schuppen J. H., Wong E.* Transformation of local martingales under a change of law // Ann. probab.— 1974.— *2*.— C. 879—888
56. *Yoeurp Ch.* Decompositions des martingales locales et formules exponentielles. // Lect. Notes Math.— *511* Sein. propab.— 1976.— C. 432—480

Глава 4

МАРТИНГАЛЫ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

I. ТЕОРИЯ: СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Введение

1. В современной теории вероятностей мартингалы — широкий класс процессов, к которому относятся такие фундаментальные процессы как броуновское движение и центрированный пуассоновский процесс. Если проводить аналогию с математической физикой, теорией потенциала, то соответствующим мартингалу понятием было бы понятие гармонической функции. Родственными мартингалу являются субмартингалы и супермартингалы, а их соответствующие понятие в анализе — это субгармонические и супергармонические функции.

Классический пример суммы $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$ — независимых интегрируемых случайных величин с нулевыми средними, рассматриваемой в её эволюции, $n\geqslant 1$, $S_0=0$, является типичным примером мартингала, поскольку

$$\mathbf{E}(S_n|\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})=\mathbf{E}(S_{n-1}+\xi_n|\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})=$$
$$=S_{n-1}+\mathbf{E}(\xi_n|\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})=S_{n-1}+\mathbf{E}\xi_n=S_{n-1},$$

т. е. если $\mathscr{F}_n=\sigma\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ — совокупность событий, порожденных величинами $\xi_1,\ldots,\xi_n$, то

1) $S_n-\mathscr{F}_n$ — измеримы

2) $\mathbf{E}(S_n|\mathscr{F}_{n-1})=S_{n-1}$,

что закладывается собственно в определение мартингала.

С формальной точки зрения удобно определение мартингала давать так.

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ — некоторое вероятностное пространство и $\mathbf{F}=(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ — неубывающее семейство σ-алгебр таких, что $\mathscr{F}_0\subseteq\mathscr{F}_1\subseteq\mathscr{F}_2\subseteq\ldots\subseteq\mathscr{F}$. (Множества из $\mathscr{F}_n$ трактуются как события, наблюдаемые до момента n (включительно)). Случайная последовательность или процесс с дискретным временем, $X=(X_n)_{n\geqslant 0}$ называется мартингалом, если $\mathbf{E}|X_n|<\infty$, $n\geqslant 0$,

$$1)\ X_n - \mathscr{F}_n\text{-измеримы}, \tag{4.1}$$

$$2)\ \mathbf{E}(X_n|\mathscr{F}_{n-1})=X_{n-1},\ n\geqslant 1. \tag{4.2}$$

Свойство 2) определило само название «мартингал» — словом, обозначающим в казино систему игры, при которой ставка удваивается при проигрыше. Именно, пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — независимые случайные величины, такие, что $\mathbf{P}(\eta_i=1)=p$, $\mathbf{P}(\eta_i=-1)=q$. Здесь p трактуется как вероятность выигрыша игроком в i-ой партии, q — проигрыша. Если $V_i=V_i(\eta_1,\ldots,\eta_{i-1})$ — ставка в i-ой партии, основанная естественно на данных, предшествующих партий, то суммарный выигрыш за n партий будет

$$X_n=\sum_{i=1}^{n} V_i\eta_i\ (=X_{n-1}+V_n\eta_n).$$

Игра справедлива, если $\mathbf{E}(X_n|\eta_1,\ldots,\eta_{n-1})=X_{n-1}$, что будет, когда $p=q=1/2$, поскольку тогда $\mathbf{E}(V_n\eta_n|\eta_1\ldots,\eta_{n-1})=V_n\mathbf{E}\eta_n=V_n(p-q)=0$.

Если $p>q$, то игра становится выгодной для игрока, поскольку

$$\mathbf{E}(X_n|\eta_1,\ \ldots,\ \eta_{n-1})\geqslant X_{n-1}.$$

Это свойство последовательности $X=(X_n)$ называют субмартингальностью; если же

$$\mathbf{E}(X_n|\eta_1,\ \ldots,\ \eta_{n-1})\leqslant X_{n-1},$$

то говорят, что X — супермартингал.

Таким образом, если процесс X есть мартингал, то $\mathbf{E}X_n=\mathbf{E}X_0=\mathrm{Const}$; субмартингал, то $\mathbf{E}X_n\geqslant\mathbf{E}X_{n-1}$; супермартингал, то $\mathbf{E}X_n\leqslant\mathbf{E}X_{n-1}$.

Рассмотрим специальный класс «стратегий» $V=(V_n)_{n\geqslant 1}$ с $V_1=1$ и

$$V_n=\begin{cases}2^{n-1}, \text{ если } \eta_1=-1,\ \ldots,\ \eta_{n-1}=-1,\\ 0, \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

смысл которых сводится к тому, что игрок, начиная со ставки $V_1=1$, каждый раз увеличивает ставку вдвое при проигрыше и прекращает игру при выигрыше.

Если $\eta_1=-1,\ \ldots,\ \eta_n=-1$, то суммарные потери за n партий составят

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}=2^n-1.$$

Поэтому, если к тому же $\eta_{n+1}=1$, то

$$X_{n+1}=X_n+V_{n+1}=-(2^n-1)+2^n=1.$$

Значит, если $\tau=\inf\{n\geqslant 1 : X_n=1\}$, то $\mathbf{P}(\tau=n)=(\frac{1}{2})^n$, $\mathbf{P}(\tau<\infty)=1$, $\mathbf{P}(X_\tau=1)=1$ и $\mathbf{E}X_\tau=1$, хотя при каждом $n\geqslant 0$ $\mathbf{E}X_n=\mathbf{E}X_0=0$. Тем самым даже при справедливой игре можно увеличить свой капитал, если придерживаться описанной системы игры удвоения ставки, называемой мартингалом. (Заметим, что эта игра требует неограниченного начального капитала и возможность неограниченных ставок, что, понятно, физически нереализуемо.)

2. Конечно, данный пример не объясняет почему мартингалы играют в предельных теоремах теории вероятностей важную роль. Наша цель как раз и состоит в том, чтобы показать, как мартингальные методы «работают» в предельных теоремах.

Сразу заметим, что когда говорят о мартингальных методах, то имеют в виду не столько технику оперирования с мартингалами, сколько стохастическое исчисление, доставляющее мощный метод потраекторного изучения случайных процессов. Стохастическое исчисление, в частности, стохастическое дифференциальное исчисление К. Ито, ставшее одним из основных методов конструирования сложных процессов из простых, играет важную роль в теории оптимального стохастического управления, нелинейного анализа случайных процессов. Стохастическое исчисление дало также и мощный метод для доказательства предельных теорем, особенно, в случае зависимых наблюдений, где традиционные методы, такие как например, метод характеристических функций не работают.

Имея в виду изложение результатов под рубрикой «Мартингалы и предельные теоремы для случайных процессов» мы ставим перед собой цель не только просто приведение соответствующих результатов и изложение технической стороны дела. Наша цель будет состоять также, и не в последнюю очередь, и в том, чтобы хотя и в крайней форме, но проследить основные вехи в становлении и развитии теории предельных теорем, проследить преемственность методов, проследить за эволюцией методов, обсудить слабые и сильные стороны разных методов и границы их применимости.

§ 2. Разные типы сходимостей. Топология Скорохода

1. Все рассматриваемые далее случайные процессы $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$, $X^n=(X_t^n)_{t\geqslant 0}$, $n\geqslant 1$, будут случайными процессами с временным индексом $t\in R_+$ и принимающими (для простоты изложения) значения на действительной прямой E^1 (более общим образом — значения в E^d, $d<\infty$). Наша задача — дать условия «сходимости» процессов X^n к X, где сходимость будет пониматься в подходящем смысле.

Напомним, что для случайных величин ξ, ξ^n, $n\geqslant 1$ следующие три вида сходимости являются в теории вероятностей основными:

сходимость по вероятности

$$\xi^n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi \Leftrightarrow \mathbf{P}(|\xi^n-\xi|\geqslant\varepsilon)\to 0;$$

сходимость с вероятностью единица, или почти наверное

$$\xi^n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi, \quad \xi^n\to\xi\ (\mathbf{P}\text{-п. н.})\Leftrightarrow \mathbf{P}(\xi^n\not\to\xi)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{P}(\sup_{m\geqslant n}|\xi^m-\xi|\geqslant\varepsilon)\to 0, \quad n\to\infty.$$

Сходимость по распределению, или по закону

$$\xi^n \xrightarrow{d} \xi, \quad \xi^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi \Leftrightarrow F^n(x)\to F(x), \quad x\in\mathbf{C}(F),$$

где $\mathbf{C}(F)$ — множество точек непрерывности предельной функции распределения F $(F^n(x)=\mathbf{P}(\xi^n\leqslant x), F(x)=\mathbf{P}(\xi\leqslant x))$.

Последнюю сходимость эквивалентным образом можно выразить как слабую сходимость

$$\int_R g(x)\,dF^n(x)\to\int_R g(x)\,dF(x), \quad \forall g\in BC$$

(BC — класс ограниченных непрерывных функций).

В том случае, когда идет речь о случайных векторах $\xi^n=(\xi_1^n,\ldots,\xi_k^n)$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_k)$, то под их сходимостью $\xi^n\xrightarrow{d}\xi$, или $\xi^n\xrightarrow{\mathscr{L}}\xi$ понимают слабую сходимость соответствующих конечномерных распределений $\mathbf{P}^n(\cdot)=\mathbf{P}(\xi^n\in\cdot)$, $\mathbf{P}(\cdot)=\mathbf{P}(\xi\in\cdot)$, т. е.

$$\int_{R^n} g(x)\,\mathbf{P}^n(dx)\to\int_{R^n} g(x)\,\mathbf{P}(dx), \quad g\in BC.$$

2. На случайный процесс (скажем, $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$) можно смотреть (и определять) разными способами:

а) как семейство случайных величин X_t, $t\geqslant 0$;

в) как случайную функцию, или случайный элемент в некотором функциональном пространстве;

с) как меру в функциональном пространстве.

Рассматриваемым основным функциональным пространством у нас будет пространство

$$\mathbf{D}=\{x: x=(x_t)_{t\geqslant 0}\text{—càd làg}\}$$

— пространство функций без разрыва второго рода, т. е. пространство функций непрерывных справа и имеющих пределы слева (càd làg — continu à droite avec des limites à gauche). Через $\mathbf{C}$ будем обозначать подпространство пространства $\mathbf{D}$, состоящее из непрерывных функций: $R_+\to E^1$ (в общем случае: $R_+\to E^d$).

В пространстве $\mathbf{C}$ можно ввести локально равномерную топологию, ассоциированную с метрикой

$$\delta_{lu}(\alpha, \beta)=\sum_N 2^{-N}(1 \wedge \|\alpha-\beta\|_N), \tag{4.3}$$

где $\alpha=\alpha(t)$, $\beta=\beta(t)$, $t \in R_+$ и $\|\alpha-\beta\|_N=\sup_{s \leqslant N} |\alpha(s)-\beta(s)|$. Относительно этой локально равномерной метрики пространство $\mathbf{C}$ является полным и сепарабельным (иначе — польским). Оно является основным при изучении **непрерывных** процессов $X=(X_t)_{t \geqslant 0}$, которые можно рассматривать как случайные элементы со значениями в пространстве $\mathbf{C}$. В этом пространстве выделяются две σ-алгебры:

$\mathscr{B}_{\text{ц}}(\mathbf{C})$ — цилиндрическая σ-алгебра, т. е. порожденная множествами вида $B=\{x : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}) \in A^k\}$, где A^k — борелевские множества в E^k

и

$\mathscr{B}(\mathbf{C})$ — борелевская σ-алгебра, т. е. порожденная всеми открытыми (в метрике δ_{lu}) подмножествами.

Обе они, оказывается, совпадают;

$$\mathscr{B}_{\text{ц}}(\mathbf{C})=\mathscr{B}(\mathbf{C}).$$

Понятно, что наличие метрики δ_{lu} позволяет говорить о слабой сходимости $(\mathbf{P}^n \xrightarrow{w} \mathbf{P})$ распределений вероятностей $\mathbf{P}^n$ к $\mathbf{P}$, где

$$\mathbf{P}^n(B)=\mathbf{P}\{\omega : X^n \in B\},$$
$$\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}\{\omega : X \in B\}, \quad B \in \mathscr{B}(C),$$

определяемой как сходимость

$$\int_{\mathbf{C}} g(x)\, \mathbf{P}^n(dx) \to \int_{\mathbf{C}} g(x)\, \mathbf{P}(dx),$$

для каждой непрерывной (в метрике δ_{lu}) ограниченной функции $g=g(x)$.

Слабую сходимость $\mathbf{P}^n \xrightarrow{w} \mathbf{P}$ распределений вероятностей процессов X^n к X мы будем обозначать также $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$, говоря, что X^n сходится по закону (по распределению) к X.

Нам понадобится также говорить о сходимости

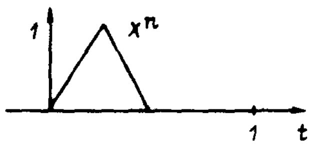
$$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(S)} X,$$

понимая под этим слабую сходимость всевозможных конечномерных распределений векторов $(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k})$ к $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$, где $t_1, \ldots, t_k \in S$. Тем самым, если $S=R_+$, то запись

$$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(R_+)} X,$$

будет означать слабую сходимость всех конечномерных распределений процесса X^n к X.

Из $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ следует сходимость $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(R_+)} X$ (напомним, что X^n, X — непрерывные процессы). Обратное, вообще говоря, не верно, что сразу видно на простом примере, в котором $X_t \equiv 0$, а X^n сосредоточено на одной траектории, изображённой на рисунке:



Ясно, что $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(R_+)} X$, но $X^n \overset{\mathscr{L}}{\nrightarrow} X$, поскольку для $g(x) = \sup |x_s|$ имеем $\int g(x)\,d\mathbf{P}^n = 1$, а $\int g(x)\,d\mathbf{P} = 0$. (Напомним, что из сходимости $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(R_+)} X$ будет следовать сходимость $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$, если семейство мер $\{\mathbf{P}^n\}$ является относительно компактным).

3. Если обратиться теперь к пространству $\mathbf{D}$ и снабдить его локально равномерной топологией, то выяснится, что хотя оно и будет полным, но не будет сепарабельным. Например, семейство функций $\alpha_s(t) = I_{[s,\infty)}(t)$, где параметр $s \in [0,1)$, несчетно, но $\delta_{lu}(\alpha_s, \alpha_{s'}) = \frac{1}{2}$ для $s \neq s'$. Это обстоятельство, в частности, приводит к тому, что в общей ситуации борелевская σ-алгебра $\mathscr{D}_{lu}$ оказывается строго шире, нежели цилиндрическая σ-алгебра $\mathscr{B}_{\text{ц}}(D)$,

$$\mathscr{D}_{lu} \supsetneq \mathscr{B}_{\text{ц}}(D),$$

и тем самым, если мы рассматриваем множества вида

$$B = \{\omega\colon X.(\omega) \in A\} = X^{-1}(A)$$

для $A \in \mathscr{D}_{lu}$, то совсем не ясно, что $B \in \mathscr{F}$, а значит, и не ясно, можно ли вообще говорить о вероятности множества B, поскольку оно не обязано быть «событием», т. е. принадлежать $\mathscr{F}$. Такого, как видели выше, не случается в пространстве C: если $A \in \mathscr{B}(\mathbf{C})$, то $B \in \mathscr{F}$, т. е. B является событием, для которого вероятность $\mathbf{P}(B)$ определена. Отметим, между прочим, что σ-алгебра $\mathscr{D}_{lu}[0]$, порожденная замкнутыми шарами, совпадает с $\mathscr{B}(\mathbf{D})$, но $\mathscr{D}^\circ_{lu}[0]$ строго меньше $\mathscr{D}_{lu}$:

$$\mathscr{B}_{\text{ц}}(\mathbf{D}) = \mathscr{D}_{lu}[0] \subset \mathscr{D}_{lu}.$$

В пространстве $\mathbf{D}$ существует, однако, метризуемая топология, называемая топологией Скорохода, которая делает пространство $\mathbf{D}$ полным сепарабельным метрическим пространством. Эта топология характеризуется тем, что последовательность функций (α_n) сходится к функции α, если и только если существует последовательность замен времени $(\lambda_n) \in \Lambda$ (Λ — множество непрерывных строго возрастающих функций с

$\lambda(0)=0$, $\lambda(t)\uparrow\infty$, $t\uparrow\infty$) такая, что

$$\sup_s |\lambda_n(s)-s| \to 0, \tag{4.4}$$

$$\sup_{s\leqslant N} |\alpha_n\circ\lambda_n(s)-\alpha(s)| \to 0, \tag{4.5}$$

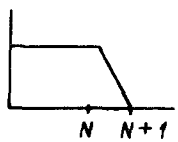
для всех $N\geqslant 1$.

Заметим, что если $\delta_{lu}(\alpha_n, \alpha)\to 0$, тогда (4.4) и (4.5) выполнены с $\lambda_n(s)=s$. Так что топология Скорохода слабее локально равномерной топологии.

В том случае, когда α — непрерывная функция, то в топологии Скорохода $\alpha_n\to\alpha$ в том и только том случае, когда $\delta_{lu}(\alpha_n, \alpha)\to 0$.

Положим

$$K_N(t)=\begin{cases} 1, & t\leqslant N, \\ N+1-t, & N<t<N+1, \\ 0 & t\geqslant N+1 \end{cases}$$



$$|||\lambda|||=\sup_{s<t}\left|\log\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right|,$$

и для α, $\beta\in\mathbf{D}$

$$\delta_N(\alpha, \beta)=\inf_{\lambda\in\Lambda}(|||\lambda|||+\|(K_N\cdot\alpha)\circ\lambda-K_N\cdot\beta\|_\infty),$$

$$\delta(\alpha, \beta)=\sum_N 2^{-N}(1\wedge\delta_N(\alpha, \beta)). \tag{4.6}$$

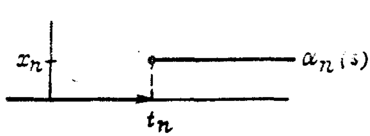
Показывается, что δ — является в пространстве $\mathbf{D}$ расстоянием ($\delta\geqslant 0$, $\delta(\alpha, \beta)=\delta(\beta, \alpha)$, удовлетворяет неравенству треугольника и если $\delta(\alpha, \beta)=0$, то $\alpha=\beta$).

Важным свойством расстояния δ является то, что борелевская σ-алгебра, $\mathscr{B}_\delta(\mathbf{D})$ совпадает с цилиндрической $\mathscr{B}_{\text{ц}}(\mathbf{D})$:

$$\mathscr{B}_\delta(\mathbf{D})=\mathscr{B}_{\text{ц}}(\mathbf{D}).$$

Приведем два примера, иллюстрирующих сходимость $\alpha_n\to\alpha$ функций α_n к α в топологии Скорохода.

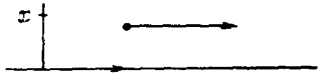
Пример 1. Пусть $\alpha_n(s)=x_n I(t_n\leqslant s)$:



Тогда $\alpha_n \to \alpha$; если и только если

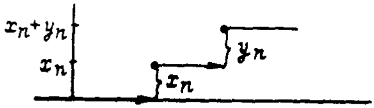
1) или $t_n \to \infty$ и тогда $\alpha \equiv 0$,

2) или же $t_n \to t < \infty$, $x_n \to x$ и тогда $\alpha(s) = xI(t \leqslant s)$:



Пример 2. Пусть

$$\alpha_n(s) = x_n I(t_n \leqslant s) + y_n I(r_n \leqslant s), \ t_n < r_n$$



Тогда $\alpha_n \to \alpha$, если и только если:

1) $t_n \to \infty$ (значит, и $r_n \to \infty$) и тогда $\alpha = 0$,

2) $t_n \to t < \infty$, $r_n \to \infty$, $x_n \to x$ и тогда $\alpha(s) = xI(t \leqslant s)$,

3) $t_n \to t < \infty$, $r_n \to r < \infty$, $x_n \to x$, $y_n \to y$ и $t < r$, если $x \neq 0 \neq y$; тогда $\alpha(s) = xI(t \leqslant s) + yI(r \leqslant s)$.

Заметим, что в топологии Скорохода из $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$ вовсе не следует, что $\alpha_n + \beta_n \to \alpha + \beta$. Так что пространство $\mathbf{D}$ с топологией Скорохода не является топологическим *векторным* пространством. Однако, если $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$ и β непрерывно, то $\alpha_n + \beta_n \to \alpha + \beta$.

Для понимания сходимости в топологии Скорохода укажем, на один полезный результат (теорема 1) в случае, когда рассматриваемые функции α принадлежат множеству $\mathscr{V}^+$ неотрицательных непрерывных справа неубывающих функций, равных нулю в нуле. Через $\mathscr{V}^{+,1}$ обозначаем подмножество $\mathscr{V}^+$, состоящее из *считающих* функций

$$\alpha_s = \sum_{n \geqslant 1} I(t_n \geqslant s),$$

где $t_1 > 0$, $t_n < t_{n+1}$, если $t_n < \infty$, $t_n \uparrow \infty$.

Теорема 1. Пусть $\alpha_n, \alpha \in \mathscr{V}^+$.

а) Мы имеем $\alpha_n \to \alpha$ в топологии Скорохода в том и только том случае, когда существует плотное подмножество S в R^+ такое, что

$$\alpha_n(s) \to \alpha(s), \tag{4.7}$$

$$\sum_{0 < u \leqslant s} |\Delta\alpha_n(u)|^2 \to \sum_{0 < u \leqslant s} |\Delta\alpha(u)|^2 \tag{4.8}$$

для $s \in S$

в) Если α — непрерывна или если $\alpha_n, \alpha \in \mathscr{V}^{+,1}$, то выполнение лишь условия (4.7) гарантирует сходимость $\alpha_n \to \alpha$.

Итак, если наделить пространство $\mathbf{D}$ метрикой δ, то можно говорить о непрерывности функций $g=g(x)$, $x\in\mathbf{D}$, и приобретает смысл понятие слабой сходимости $\mathbf{P}^n\xrightarrow{w}\mathbf{P}$ мер $\mathbf{P}^n$ к $\mathbf{P}$, определенных на $(\mathbf{D}, \mathscr{B}(\mathbf{D}))$:

$$\int_{\mathbf{D}} g(x)\mathbf{P}^n(dx)\to\int_{\mathbf{D}} g(x)\mathbf{P}(dx).$$

В связи со слабой сходимостью $\mathbf{P}^n\xrightarrow{w}\mathbf{P}$ отметим, что из нее не вытекает (как в случае пространства $\mathbf{C}$) слабая сходимость *всех* конечномерных распределений

$$\mathbf{P}^n_{t_1,\ldots,t_k}\xrightarrow{w}\mathbf{P}_{t_1,\ldots,t_k},\quad t_i\in R_+.$$

Именно, если $X=(X_t(\omega))_{t\in R_+}$ — процесс с распределением $\mathbf{P}$ в $(\mathbf{D}, \mathscr{B}(\mathbf{D}))$ и

$$J(X)=\{t\in R_+ : \mathbf{P}(\Delta X_t\neq 0)>0\},\quad \Delta X_t=X_t-X_{t-},$$

то гарантируется лишь, что

$$\mathbf{P}^n\xrightarrow{w}\mathbf{P}\Rightarrow\mathbf{P}^n_{t_1,\ldots,t_k}\xrightarrow{w}\mathbf{P}_{t_1,\ldots,t_k}$$

для всех тех t_j, которые принадлежат множеству

$$R_+\diagdown J(X).$$

(Это следует из того, что функции $\alpha\to\alpha(t)$, так же как и $\alpha\to\alpha(t-)$ непрерывны на $\mathbf{D}$ в каждой точке α такой, что $t\in R_+\diagdown J(\alpha)$, т. е. такой, что $\Delta\alpha(t)=0$).

Как было сказано выше одна из наших задач — изложение результатов, полученных мартингальными методами в теории сходимости $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$ и $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}(S)}X$ случайных процессов, т. е. сходимости $\mathbf{P}^n\xrightarrow{w}\mathbf{P}$, и $\mathbf{P}^n\xrightarrow{w(S)}\mathbf{P}$ (w — слабая сходимость, — слабая сходимость конечномерных распределений в моменты времени, принадлежащими множеству $S\subseteq R_+$).

Наше изложение мы начинаем с ряда основных результатов в области классических предельных теорем, особо делая акцент на методы их доказательств, что дает нам возможность более полно понять суть «мартингальных» методов.

§ 3. Краткий обзор ряда классических предельных теорем теории вероятностей

1. Первой предельной теоремой теории вероятностей был закон больших чисел Я. Бернулли (1654—1705), который в своих «Ars Conjectandi» (опубликовано на латинском языке в 1713 г.) доказал и вполне строго следующий результат.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих два значения,

$$\mathbf{P}(\xi_1=1)=p, \ \mathbf{P}(\xi_1=0)=q(=1-p)$$

(это — так называемая схема Бернулли). Если $S_n=\xi_1+\ldots$ $\ldots+\xi_n$ — сумма «успехов» за n испытаний, то частота

$$\frac{S_n}{n}\to p$$

в том смысле, что

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right)\to 0, \quad \forall\varepsilon>0. \tag{4.9}$$

Это утверждение равносильно тому, что

$$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{\mathbf{P}} p,$$

или что

$$F_{\frac{S_n}{n}}(X)\to F(x)=I(x\geqslant p), \quad x\in E^1\setminus\{p\}. \tag{4.10}$$

Доказательство Бернулли было основано на **прямом** анализе функций распределений $F^n(x)=F_{\frac{S_n}{n}}(x)$, для которых, очевидно,

$$F^n(x)=\mathbf{P}(S_n\leqslant nx)=\sum_{k\leqslant nx}C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{4.11}$$

что и дало возможность доказать сходимость (10).

2. Исторически следующей предельный теоремой, также доказываемой **прямым** анализом функций $F^n(x)$ была теорема Муавра—Лапласа [A. De Moivre: Miscellania Analytica, 1733 in Latin Doctrine of Chances, 1738, 1756 in English, P. S. Laplace: Théorie analitique, 1812].

Эта теорема, относящаяся по современной терминологии к «центральной предельной теореме», утверждает, что если

$$\Phi^n(x)=\mathbf{P}\left\{\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}\leqslant x\right\},$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy,$$

то

$$\Phi^n(x)\to\Phi(x), \ x\in E^1. \tag{4.12}$$

Поскольку $\Phi(x)$ — непрерывная функция, то сходимость в (4.12) равномерна по x, т. е.

$$\sup_x|\Phi^n(x)-\Phi(x)|\to 0, \quad n\to\infty. \tag{4.13}$$

Муавр доказал (1721 г.) эту теорему для $p=1/2$ (с кратким указанием на то, что все делается также и для $p\neq 1/2$)

прямым изучением вероятностей

$$\mathbf{P}_k^n = \mathbf{P}(S_n = k) = \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k} \left(= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} \right) \qquad (4.14)$$

с использованием для анализа факториалов некоторого предвестника «формулы Стирлинга» (1730 г.), что, впрочем, стимулировало Стирлинга к открытию формулы

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n, \qquad (4.15)$$

носящей теперь его имя. В окончательном изложении (в 1733 году) Муавр уже пользуется формулой Стирлинга, отмечая, что хотя она и не нужна для его вывода, однако эта формула «has spread a singular Elegancy of the solution».

Формула (4.14) для четных n, $k = \frac{n}{2}$ и $p = \frac{1}{2}$ имеет вид

$$\mathbf{P}_{n/2}^n = \mathbf{P}\left(S_n = \frac{n}{2}\right) = C_n^{\frac{n}{2}}\, 2^{-n}.$$

Муавр показывает, что

$$C_n^{n/2} 2^{-n} \sim A \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\sqrt{n-1}}, \qquad (4.16)$$

где константа $A \left(\approx 2 \frac{21}{125} \right)$ определялась им из представления

$$\ln \frac{A}{2} = \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680} + \ldots . \qquad (4.17)$$

Чуть позже Стирлинг открывает, что

$$\ln \sqrt{2\pi} = 1 - \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680} + \ldots \right]$$

и тем самым стало ясно, что константа Муавра A есть не что иное как $\frac{2e}{\sqrt{2\pi}}$.

Получив таким образом аппроксимацию

$$\mathbf{P}_{n/2}^n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{n}{2}}},$$

Муавр переходит затем к вероятностям вида $\mathbf{P}_{\frac{n}{2}+l}^n$ и для «не очень больших l» получает, что

$$\mathbf{P}_{\frac{n}{2}+l}^n = \mathbf{P}\left(S_n = \frac{n}{2} + l\right) \sim \mathbf{P}_{\frac{n}{2}}^n \cdot e^{-\frac{2l^2}{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi\left(\frac{n}{2}\right)}}\, e^{-\frac{l^2}{\left(\frac{n}{2}\right)}}.$$

В современных изложениях этот путь воплощается в том, что говорят, что для $k=k(n)$, которые растут с ростом n так, что

$$|k-np|=o(npq)^{2/3},$$

справедлива «локальная теорема»:

$$\mathbf{P}(S_n=k)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}, \qquad (4.18)$$

откуда уже нетрудно перейти и к «интегральной теореме»

$$\Phi^n(x)=\mathbf{P}\left(\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}\leqslant x\right)\to\Phi(x), \quad n\to\infty. \qquad (4.19)$$

Метод Лапласа получения асимптотической формулы для $\mathbf{P}^n_{n/2}$ был основан на другой замечательной идее, в сущности, давшей начало методу характеристических функций.

Идея Лапласа состояла в следующем.

Поскольку (n — четно)

$$(\alpha+\beta)^n=\alpha^n+C_n^1\alpha^{n-1}\beta+\ldots+C_n^{\frac{n}{2}}\alpha^{\frac{n}{2}}\beta^{\frac{n}{2}}+\ldots+\beta^n, \qquad (4.20)$$

то полагая $\alpha=e^{-it}$, $\beta=e^{it}$ получаем, что

$$(e^{-it}+e^{it})^n=e^{-int}a_{-n}+e^{-i(n-1)t}a_{-(n-1)}+\ldots+a_0+\ldots+a_ne^{int}, \qquad (4.21)$$

где $a_{-n}=1$, $a_{-(n-1)}=C_n^1$, $\ldots$, $a_0=C_n^{\frac{n}{2}}$, $\ldots$, $a_n=1$. При отыскании «удобных» формул для $\mathbf{P}^n_{n/2}=C_n^{n/2}p^{n/2}q^{n/2}$ основная трудность состоит в «хорошей» аппроксимации для числа сочетаний $C_n^{n/2}$, что в соответствии с (4.21) сводится к исследованию коэффициента a_0. Интегрирование (4.21) по t сразу дает

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{-it}+e^{it})^n\,dt=\frac{2^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Cos}^n\,t\,dt$$

и, значит, $\left(p=q=\frac{1}{2}\right)$

$$\mathbf{P}^n_{\frac{n}{2}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Cos}^n\,t\,dt.$$

Иначе говоря, вопрос об асимптотическом поведении $\mathbf{P}^n_{n/2}$ сводится к изучению интегралов $\int_0^{2\pi}\cos^n t\,dt$, асимптотический анализ которых для Лапласа-аналитика не представлял трудностей.

3. Напомним, также, что прямыми методами Пуассона (в книге «Recherches sur la probabilité des judements en matiére criminelle et en matiére civile», 1837) была получена (в так называемой «схеме Бернулли») известная «пуассоновская аппроксимация» вероятностей редких событий.

Именно, пусть для каждого $n \geqslant 1$

$$\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}$$

— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с

$$\mathbf{P}(\xi_{ni}=1)=p_n, \quad \mathbf{P}(\xi_{ni}=0)=q_n\,(=1-p_n),$$

причем $np_n \to \lambda > 0$. Тогда прямой анализ вероятностей

$$\mathbf{P}_k^n=\mathbf{P}(S_n=k)\ \left(=C_n^k p^k q^{n-k}\right),$$

где $S_n=\xi_{n1}+\ldots+\xi_{nn}$ приводит к «пуассоновскому» приближению

$$\mathbf{P}_k^n \to \pi_k=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k=0, 1, \ldots. \tag{4.22}$$

4. В 1887 году П. Л. Чебышев публикует работу «О двух теоремах относительно вероятностей», в которой он предложил новый метод, названный методом моментов, доказательства центральной предельной теоремы для сумм независимых случайных величин, принимающих уже не обязательно только два значения. (Напомним, между прочим, что двадцатью годами раньше, в 1867 году Чебышев публикует статью «О средних величинах», в которой он перешел от рассмотрения случайных событий и их вероятностей к изучению случайных величин и их математических ожиданий. Именно Чебышев впервые осознал и использовал всю силу понятия случайной величины и математического ожидания.)

Постановка задачи, рассмотренной Чебышевым, была таковой.

Пусть $F^n=F^n(x)$ — функции распределения случайных величин ξ^n, $n \geqslant 1$, и

$$m_k^n=\int_{-\infty}^{\infty} x^k dF^n(x), \quad k \geqslant 1,$$

их моменты, предполагаемые существующими. Пусть

$$T^n=\{m_k^n, \ k \geqslant 1\}$$

набор этих моментов.

Пусть также $F=F(x)$ — некоторая функция распределения с набором моментов

$$T=\{m_k, \ k \geqslant 1\}.$$

Если $T^n \to T$ (в том смысле, что $m_k^n \to m_k$, $n \to \infty$, $k \geqslant 1$), то естественно ожидать, что и $F^n \xrightarrow{w} F$.

Поскольку $m_2^n \to m_2$, то в силу неравечства Чебышева

$$\lim_{c \uparrow \infty} \overline{\lim_{n}} \mathbf{P}(|\xi^n| \geqslant c) \leqslant \lim_{c \uparrow \infty} \overline{\lim_{n}} \frac{\mathbf{E}\,|\xi^n|^2}{c^2} = 0 \tag{4.23}$$

и значит, для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такой компакт $K_\varepsilon = [-c_\varepsilon, c_\varepsilon]$, что все меры $\mathbf{P}^n$, соответствующие F^n, с точностью до ε «сидят» на K_ε:

$$\sup_n \mathbf{P}(\xi^n \in K_\varepsilon) = \sup_n \mathbf{P}^n(K_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon. \tag{4.24}$$

Это условие, называемое плотностью семейства мер $\{\mathbf{P}^n\}$ (или плотностью семейства случайных величин $\{\xi^n\}$ по «основной» мере $\mathbf{P}$) равносильно (в очень общей ситуации — это теорема Ю. В. Прохорова) тому, что семейство мер $\{\mathbf{P}^n\}$ относительно компактно, т. е. всякая подпоследовательность $\{\mathbf{P}^{\tilde{n}}\} \subseteq \{\mathbf{P}^n\}$ содержит слабо сходящуюся подпоследовательность $\{\mathbf{P}^{n'}\} \subseteq \{\mathbf{P}^{\tilde{n}}\}$

$$\mathbf{P}^{n'} \to \mathbf{P}',$$

где $\mathbf{P}'$ — некоторая вероятностная мера, быть может, и не принадлежащая исходному семейству $\{\mathbf{P}^n\}$.

Для всего дальнейшего важно следующее замечание: если **любая** слабо сходящаяся подпоследовательность $\{\mathbf{P}^{n'}\}$ сходится к одному и тому же пределу $\mathbf{P}'$, то и вся последовательность $\{\mathbf{P}^n\}$ слабо сходится и именно к этому пределу $\mathbf{P}'$ (Доказательство — от противного).

Это замечание подсказывает общий метод доказательства импликации

$$(T^n \to T) \Rightarrow (\mathbf{P}^n \xrightarrow{w} \mathbf{P}) \tag{4.25}$$

I. Установление плотности (относительной компактности) семейства $\{\mathbf{P}^n\}$.

II. Характеризация всех слабых пределов $\mathbf{P}'$.

III. Идентификация $\mathbf{P}'$ с $\mathbf{P}$.

Наглядно все это можно изобразить так:

$$(T^n \to T) \Rightarrow \overset{\text{I}}{\boxed{\text{Установление плотности семейства } \{P^n\}}} \oplus \overset{\text{II}}{\boxed{\text{Характеризация всех слабых пределов } P'}} \oplus \underset{\text{III}}{\boxed{\text{Идентификация } P' \text{ с } P}} \Rightarrow (P^n \xrightarrow{w} P) \tag{4.26}$$

Применительно к рассматриваемому методу моментов:

(I) — Установление плотности семейства $\{\mathbf{P}^n\}$ следует из сходимости $m_2{}^n \to m$ и неравенства Чебышева (см. (4.23));

(II) — Характеризацию всех слабых пределов $\mathbf{P}'$ здесь естественно основывать на том, что сходимость $\mathbf{P}^{n'} \xrightarrow{w} \mathbf{P}'$ должна бы влечь за собой то, что

$$\int x^k \mathbf{P}^{n'}(dx) \to \int x^k \mathbf{P}^1(dx),\ k=1,\ 2, \dots . \tag{4.27}$$

Это, конечно, так, если все меры $\mathbf{P}^{n'}$ и $\mathbf{P}'$ сосредоточены на конечном интервале $[a,\ b]$. В общем случае это, вообще говоря, конечно, не верно. Тем не менее, если это так, то поскольку наряду с (4.27) также имеем, что $m_k^n \to m_k$, $k \geqslant 1$, можно будет дать такую характеризацию слабых пределов $\mathbf{P}'$:

$\mathbf{P}'$ таково, что его моменты $\int x^k \mathbf{P}'(dx)$ совпадают с моментами m_k, $k \geqslant 1$.

Наконец, заключительный этап **идентификации** всех слабых пределов $\mathbf{P}'$ с $\mathbf{P}$ проводят исходя из обычно делаемого предположения, что моменты $T = \{m_k\}$ однозначно определяют распределение $\mathbf{P}$. (Для однозначности достаточно, например, выполнения условия Карлемана:

$$\sum \frac{1}{(m_{2n})^{1/2n}} = \infty \Big). \tag{4.28}$$

Итак, если, скажем, a priori известно, что все рассматриваемые распределения сосредоточены на одном и том же конечном интервале $[a,\ b]$, то (поскольку тогда (4.27) очевидно выполнено) характеризация и идентификация приводят к тому, что все слабые пределы $\mathbf{P}'$ совпадают с $\mathbf{P}$.

Таким образом, в этом случае

$$T^n \to T \Rightarrow \boxed{\ I \oplus II \oplus III\ } \Rightarrow P^n \xrightarrow{w} P.$$

Как известно, у П. Л. Чепышева была лакуна в реализации метода моментов при доказательстве центральной предельной теоремы (он считал, что должны существовать все моменты, но требовал сходимость лишь для первых двух), которую затем исправил А. А. Марков.

5. Существенный следующий шаг в установлении границ применимости центральной предельной теоремы был сделан (в 1900, 1901 годах) А. М. Ляпуновым, применивший к его доказательству метод характеристических функций, восходящий к Лапласу). Сначала А. М. Ляпунов предполагал у суммируемых величин существование третьих абсолютных моментов, а затем ослабил это предположение до существования моментов порядка $2+\delta$, $\delta > 0$.

Если η_1 и η_2 независимые случайные величины с функциями распределения F_{η_1} и F_{η_2}, то функция распределения F_{η_1} и F_{η_2}, их суммы есть свертка F_{η_1} и F_{η_2}:

$$F_{\eta_1+\eta_2} = F_{\eta_1} * F_{\gamma_2},$$

т. е.

$$F_{\eta_1+\eta_2}(x)=\int F_{\eta_1}(x-y)\,dF_{\eta_2}(y).$$

Свертка не является простым образованием и *прямой* анализ свертки $F^n=F_{\eta_1+\ldots+\eta_n}$ суммы независимых случайных величин практически не представляется возможным в сколь-нибудь общей ситуации.

Однако, характеристическая функция $f^n(t)=f_{\eta_1+\ldots+\eta_n}(t)$ суммы независимых случайных величин есть *произведение* характеристических функций,

$$f^n(t)=f_{\eta_1}(t)\ldots f_{\eta_n}(t),$$

что поддается проще для анализа, нежели свертка F^n.

Рассмотрим, как «работает» метод характеристических функций при исследовании вопроса о слабой сходимости распределений F^n случайных величин ξ^n к распределению F случайной величины ξ.

Пусть

$$f^n(t)=\mathrm{E}e^{it\xi^n}\left(=\int e^{itx}\,dF^n(x)=\int e^{itx}\mathbf{P}^n(dx)\right),$$

$$f(t)=\mathrm{E}e^{it\xi}\left(=\int e^{itx}\,dF(x)=\int e^{itx}\mathbf{P}(dx)\right)$$

— соответствующие характеристические функции. Обозначим

$$T^n=\{f^n(t),\ t\in R\},\qquad T=\{f(t),\ t\in R\}.$$

Хорошо известно, что характеристические функции f и функции распределения F, а значит и соответствующие распределения вероятностей $\mathbf{P}$ находятся во взаимно однозначном соответствии. Это дает в определенной степени надежду, что из сходимости характеристических функций вытекает слабая сходимость соответствующих распределений вероятностей:

$$T^n\to T\Rightarrow\mathbf{P}^n\xrightarrow{w}\mathbf{P}\tag{4.29}$$

Так оно на самом деле и есть, и доказывается это с привлечением промежуточных этапов I⊕II⊕III («плотность»⊕«характеризация»⊕«идентификация») следующим образом.

Поскольку имеет место оценка

$$\mathbf{P}^n\left(E^1\diagdown\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right]\right)\leqslant\frac{K}{a}\int_0^a[1-\mathrm{Re}\,f^n(t)]\,dt,\tag{4.30}$$

то из сходимости $f^n(t)\to f(t)$, $t\in R$, и непрерывности $f(t)$ в нуле вытекает плотность семейства $\{\mathbf{P}^n\}$.

Если, далее, $\mathbf{P}^{n'}$ — слабо сходящая подпоследовательность, $\mathbf{P}^{n'}\xrightarrow{w}\mathbf{P}'$, то из самого определения слабой сходимости вытекает, что при каждом $t\in R$ $f^{n'}(t)\to f'(t)$, где $f'=f'(t)$ — характеристистическая функция $\mathbf{P}'$. Но так как по предположению $f^n(t) \to f(t)$, то $f' = f$ и значит мы получаем следующую **характеризацию** предельных точек $\mathbf{P}'$:

характеристической функцией распределений $\mathbf{P}'$ является функция f.

Но, как уже отмечалось, по характеристической функции распределение определяется однозначно и, следовательно, осуществляется **идентификация** $\mathbf{P}'$ с $\mathbf{P}$ и тем самым имеет место требуемая импликация. (Заметим, что обратная импликация очевидна и что в (4.29) нет надобности оговаривать, что $f = f(t)$ — характеристическая функция: нужна лишь ее непрерывность в нуле, тогда из приведенных выше рассмотрений автоматически вытекает, что она является характеристической функцией некоторого распределения $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}^n \xrightarrow{w} \mathbf{P}$.)

Итак, в методе характеристических функций все промежуточные этапы I, II, III проверены и наглядно все это можно изобразить следующим образом:

$$T^n \to T \Rightarrow \underset{\text{Из оценки}}{\boxed{\text{Плотность}}} \oplus \underset{\substack{\text{х.ф. } f' \text{ меры } P' \\ \text{совпадает с } f}}{\boxed{\text{Характеризация } P'}} \oplus \underset{\substack{\text{По х.ф. однозначно} \\ \text{восстанавливается} \\ \text{распределение}}}{\boxed{\text{Идентификация}}} \Rightarrow P^n \to P$$

6. Метод характеристических функций оказался очень мощным при доказательстве предельных теорем теории вероятностей для сумм независимых слагаемых. Применительно к центральной предельной теореме (ц. п. т.) этот метод привел А. М. Ляпунова (1901 г.) и Линдеберга (1922 г.) к следующим условиям справедливости ц. п. т.

Теорема 4.1. Пусть $S_n = \xi_{n1} + \ldots + \xi_{nn}$, где при каждом $n \geqslant 1$

$$\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}$$

— независимые случайные величины, $\mathbf{E}\xi_{ni} = 0$, $D_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\xi_{nk}^2 = 1$. Тогда

$$(\text{Л}) \qquad \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\,|\xi_{nk}|^{2+\delta} \to 0 \Rightarrow \mathbf{P}(S_n \leqslant x) \to \Phi(x), \quad x \in R,$$

(условие Ляпунова)

$$(L) \qquad \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\,[|\xi_{nk}|^2;\ |\xi_{nk}| > \varepsilon] \to 0 \Rightarrow \mathbf{P}(S_n < x) \to \Phi(x), \quad x \in R.$$

(условие Линденберга)

Ясно, что (Л) $\Rightarrow$ (L). Уместно сейчас также отметить, что из условия Линдеберга вытекает, что рассматриваемые случайные величины $\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}$ асимптотически пренебрегаемы в том смысле, что

$$\max_{k\leqslant n} \mathbf{P}(|\xi_{nk}|>\varepsilon)\to 0,\ n\to\infty, \tag{4.31}$$

и даже более того

$$\max_{k\leqslant n} D\xi_{nk}\to 0,\ n\to\infty. \tag{4.32}$$

Однако, самые простые примеры показывают, что ц. п. т. может иметь место и без выполнения условия Линдеберга или даже, скажем, выполнения условия (4.32). Например, если

$$\xi_{nk}=\frac{\xi_k}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} D\xi_i}},$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых нормально распределенных случайных величин с $\mathbf{E}\xi_k=0$, $D\xi_1=1$, $D\xi_k=2^{k-2}$, $k\geqslant 2$, то очевидно $\mathbf{P}(S_n\leqslant x)=\Phi(x)$, однако, условие (4.32) здесь не выполнено:

$$\max_{k\leqslant n} D\xi_k=\frac{1}{2}.$$

В этой связи упомянем результат В. М. Золотарева, который дал необходимое и достаточное условие справедливости центральной предельной теоремы для сумм независимых случайных величин без предположения асимптотической пренебрегаемости. В модифицированной форме, предложенной В. И. Ротарем [21], результат В. М. Золотарева [13] выглядит так.

Пусть $\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}$ — независимые случайные величины с $\mathbf{E}\xi_{nk}=0$, $\mathbf{E}\xi^2_{nk}\equiv\sigma^2_{nk}<\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma^2_{nk}=1$, $F_{nk}(x)=\mathbf{P}(\xi_{nk}\leqslant x)$. Тогда условие

$$(\text{Л})\qquad \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|>\varepsilon}|x|\left|F_{nk}(x)-\Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nk}}\right)\right|dx\to 0,\ \varepsilon>0,$$

является необходимым и достаточным для справедливости центральной предельной теоремы.

Отметим также следующее обстоятельство. Еще в 1926 г. в курсе по предельным теоремам А. Я. Хинчин задался вопросом о том, имеется ли связь между законом больших чисел и центральной предельной теоремой. Ответ, найденный в 1938 году Д. А. Райковым и А. А. Бобровым, гласит, в частности, следующее.

Пусть $\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$\mathbf{E}\xi_{nk}=0, \ \sum_{k=1}^{n} D\xi_{nk}=1,$$

удовлетворяющих условию асимптотической малости (4.31). Тогда для того, чтобы $\mathbf{P}(S_n \leqslant x) \to \Phi(x)$, $x \in E^1$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено (по терминологии Хинчина) условие относительной устойчивости

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} 1. \tag{4.33}$$

Оказывается, и это станет ясно в дальнейшем, в аналогичном виде можно формулировать условия справедливости центральной предельной теоремы не только в случае независимых слагаемых. Ниже будет разъяснен и вероятностный смысл суммы квадратов, входящих в (4.33).

6. Методом характеристических функций были найдены условия сходимости во многих предельных теоремах. Для конкретности, а также и в связи с последующим изложением приведем ряд формулировок предельных теорем в случае сходимости к так называемым безгранично делимым распределениям.

Напомним, что случайная величина ξ называется безгранично делимой, если при любом $n \geqslant 1$ она может быть представлена в виде

$$\xi \overset{d}{=} \xi_{n1} + \ldots + \xi_{nn},$$

где $\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, а равенство «$\overset{d}{=}$» понимается в смысле совпадения их распределений. В терминах характеристических функций условие безграничной делимости ξ означает, что ее характеристическая функция $f(\lambda)$ может быть при любом $n \geqslant 1$ представлена в виде

$$f(\lambda) = [f_n(\lambda)]^n, \qquad \lambda \in E^1, \tag{4.34}$$

где $f_n(\lambda)$ — некоторая характеристическая функция.

Сначала А. Н. Колмогоров (1933 г.) для случая величин с конечной дисперсией, а затем Леви ([41]) и А. Я. Хинчин ([24]) в общем случае установили, что характеристическая функция $f(\lambda)$ безгранично-делимой случайной величины допускает представление в виде

$$f(\lambda) = e^{\psi(\lambda)}, \tag{4.35}$$

где (кумулянта) $\psi(\lambda) = \psi_{b, C, F}(\lambda)$ определяется триплетом параметров (b, C, F) и имеет следующую структуру:

$$\Psi_{b,C,F}(\lambda) = i\lambda b - \frac{\lambda^2}{2} C + \int_{E^1} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda h(x)) F(dx), \tag{4.36}$$

где функция «урезания» $h=h(x)$ — любая ограниченная функция с компактным носителем и такая, что $h(x)=x$ в некоторой окрестности нуля (во многих случаях удобно функцию $h=h(x)$ выбирать непрерывной); $b\in E^1$, $C\geqslant 0$, $F(dx)$ — мера на E^1 с

$$F(\{0\})=0 \text{ и } \int_{E^1}(x^2\wedge 1)F(dx)<\infty.$$

Заметим, что характеристики C и F являются «внутренними» характеристиками распределения в том смысле, что их значения не зависят от выбора функции урезания h. Что же касается характеристики b, то она зависит от h и для двух разных функций урезания h и h' соответствующие характеристики b и b' связаны соотношением

$$b'-b=\int_{E^1}[h'(x)-h(x)]F(dx). \tag{4.37}$$

Триплет характеристик $T=(b, C, F)$ однозначно определяет (при выбранной функции $h=h(x)$) характеристическую функцию. Поэтому, если ставится вопрос об условиях сходимости распределений случайных величин ξ^n с триплетами $T^n=(b^n, C^n, F^n)$ к распределению случайной величины ξ с триплетом $T=(b, C, F)$, то можно ожидать, что естественные условия сходимости можно выразить в терминах сходимости компонент этих триплетов.

Для формулировки соответствующего классического результата удобно ввести следующие обозначения:

$$\widetilde{C}=C+\int_{E^1}h^2(x)F(dx),\quad \widetilde{C}^n=C^n+\int_{E^1}h^2(x)F^n(dx), \tag{4.38}$$

и

$$F(g)=\int_{E^1}g(x)F(dx),\quad F^n(g)=\int_{E^1}g(x)F^n(dx). \tag{4.39}$$

Тогда имеет место следующая

Теорема 4.2 (Б. В. Гнеденко, 1939 г.). Пусть $h=h(x)$ — непрерывная функция урезания. Для того, чтобы безгранично-делимые случайные величины $\xi^n\xrightarrow{d}\xi$ необходимо и достаточно, чтобы имела место сходимость $\widetilde{T}^n\to\widetilde{T}^n$ триплетов $\widetilde{T}^n=(b^n, \widetilde{C}^n, F^n)$ к $\widetilde{T}=(b, \widetilde{C}, F)$ в том смысле, что

$$\begin{gathered} b^n\to b,\\ \widetilde{C}^n\to\widetilde{C},\\ F_n(g)\to F(g),\quad g\in C_2, \end{gathered} \tag{4.40}$$

где C_2 — множество непрерывных ограниченных функций, имеющих пределы на бесконечности и равных нулю в окрестности нуля.

Замечание 1. Если выполнены условия (4.40), то $F_n(g)\to F(g)$ и для функций g из класса $C_3\supset C_2$, состоящего из всех ограниченных непрерывных функций, удовлетворяющих условию $g(x)=o(x^2)$, $x\to 0$.

Замечание 2. В (4.40) достаточно требовать, чтобы функции g принадлежали лишь классу C_1, определяемому как подкласс класса C_2, который содержит все функции вида $g_a(x)=(a|x|-1)^+\wedge 1$ для всех положительных рациональных a. Таким образом

$$C_1\subset C_2\subset C_3.$$

Истинный смысл важности класса безгранично-делимых распределений объясняется тем, что они (и только они) выступают в качестве предельных распределений для сумм независимых **асимптотически пренебрегаемых (малых)** слагаемых $\xi_{n1},\ldots,\xi_{nn}$.

Именно, имеет место следующая

Теорема 4.3 (см., например, Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, [8]).

1) Если $S^n=\xi_{n1}+\ldots+\xi_{nn}\xrightarrow{d}\xi$, то ξ — безгранично делима;

2) Для того, чтобы $S^n\xrightarrow{d}\xi$, где ξ — безгранично делимая случайная величина с триплетом $T=(b, C, F)$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}h(\xi_{nk})\to b,$$

$$\sum_{k=1}^{n}[\mathbf{E}h^2(\xi_{nk})-(\mathbf{E}h(\xi_{nk}))^2]\to\widetilde{C}, \tag{4.41}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}g(\xi_{nk})\to F(g),\ g\in C_2 \text{ или } g\in C_1.$$

В том случае, когда S^n, $n\geqslant 1$, — безгранично делимые случайные величины, условия (4.40) и (4.41) становятся, как можно показать, равносильными.

7. В связи с этой теоремой естественно теперь было бы поставить такой вопрос, а нельзя ли ее обобщить на случай зависимых случайных величин, по возможности, сохраняя структуру условий (4.41). Оказалось, что можно и вот каким образом.

Будем предполагать, что все рассмотрения ведутся на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ с выделенными на нем потоками σ-алгебр $\mathbf{F}^n=(\mathscr{F}_k^n)_{k\geqslant 0}$, $n\geqslant 1$, такими, что

$$\mathscr{F}_0^n\subseteq\mathscr{F}_1^n\subseteq\ldots\subseteq\mathscr{F}.$$

В простейших случаях $\mathscr{F}_k^n=\sigma\{\eta_{n0},\eta_{n1},\ldots,\eta_{nk}\}$ — σ-алгебра, порожденная некоторыми случайными величинами $\eta_{n0},\eta_{n1},\ldots,\eta_{nk}$. По своему смыслу $\mathscr{F}_k^n$ — есть совокупность событий (в n-ой серии), наблюдаемых до момента k включительно.

Предположим теперь, что для каждого $n\geqslant 1$,

$$\xi_{n1},\ \ldots,\ \xi_{nn} —$$

последовательность (вообще говоря, зависимых) случайных величин таких, что

$$\xi_{nk}-\mathscr{F}_{nk} — \text{измеримы.}$$

Пусть также $S^n=\xi_{n1}+\ldots+\xi_{nn}$. Спрашивается, при каких условиях $S^n\xrightarrow{d}\xi$, где ξ — безгранично-делимая случайная величина с триплетом $T=(b, C, F)$.

Следующая теорема (1982 г. — Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев; 1980 г. — J. Jacod, J. Mémin) дает ответ на поставленный вопрос.

Теорема 4.4. Пусть выполнены условия асимптотической пренебрегаемости

$$\sup_{k\leqslant n}\mathbf{P}(|\xi_{nk}|>\varepsilon\,|\,\mathscr{F}_{k-1}^n)\xrightarrow{\mathbf{P}}0$$

и условия

$$\begin{aligned}
&(\beta)\ \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left[h(\xi_{nk})\,|\,\mathscr{F}_{k-1}^n\right]\xrightarrow{\mathbf{P}}b,\\
&(g)\ \sum\left(\mathbf{E}\left[h^2(\xi_{nk})\,|\,\mathscr{F}_{k-1}^n\right]-\left[\mathbf{E}h\left(\xi_{nk}\,|\,\mathscr{F}_{k-1}^n\right)\right]^2\right)\xrightarrow{\mathbf{P}}\widetilde{C},\\
&(\delta)\ \sum\mathbf{E}\left[g(\xi_{nk})\,|\,\mathscr{F}_{k-1}^n\right]\xrightarrow{\mathbf{P}}F(g),\quad g\in C_1.
\end{aligned}\tag{4.42}$$

Тогда $S^n\xrightarrow{d}\xi$.

Доказательство этой теоремы удобнее получать как частный случай слабой сходимости конечно-мерных распределений случайных процессов

$$X_t^n=\sum_{k}^{[nt]}\xi_{nk},\quad t\geqslant 0,$$

к некоторому процессу с независимыми приращениями X_t, $t\geqslant 0$. Такое вложение позволяет к тому же и прояснить смысл выражений, входящих в условия (β) — (δ).

§ 4. Сходимость процессов с независимыми приращениями

1. Процессы с независимыми приращениями X определяются как процессы, для которых любые приращения

$$X_{t_k}-X_{t_{k-1}},\ldots,X_{t_2}-X_{t_1},\ X_{t_1}-X_{t_0}$$

с $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$, $k \geqslant 2$ образуют совокупность независимых случайных величин.

Всякий процесс X с независимыми приращениями может быть представлен в виде

$$X_t = A_t + Y_t,$$

где $A = (A_t)_{t \geqslant 0}$ — детерминированная функция ($A \in \mathbf{D}$), вообще говоря, локально неограниченной вариации, а $Y = (Y_t)_{t \geqslant 0}$ — процесс с независимыми приращениями, для которого при любом $\lambda \in R$ функция

$$g_t^Y(\lambda) = \mathbf{E} e^{i\lambda Y_t}, \quad t \geqslant 0, \tag{4.43}$$

имеет как функция от t локально ограниченную вариацию. Поскольку детерминированная компонента A не представляет вероятностного интереса будем во всем дальнейшем считать $A_t \equiv 0$ и значит рассматриваемый процесс X с независимыми приращениями будет предполагаться таким, что соответствующая функция $g_t(\lambda) = g_t(\lambda)$, $t \geqslant 0$, имеет локально ограниченную вариацию.

В этом предположении устанавливается, что характеристическая функция

$$g_t(\lambda) = \mathbf{E} e^{i\lambda X_t}$$

есть решение (в классе функций из $\mathbf{D}$) уравнения (λ — фиксировано)

$$dg_t(\lambda) = g_{t-}(\lambda)\, dG_t(\lambda) \tag{4.44}$$

с

$$G_t(\lambda) = i\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} C_t + \int_0^t \int_{E^1} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda h(x))\, \nu(ds, dx), \tag{4.45}$$

где

$B = (B_t)$ — функция локально ограниченной вариации, $B_0 = 0$;
$C = (C_t)$ — непрерывная неубывающая функция, $C_0 = 0$;

$$\nu([0, t] \times A) = \mathbf{E}\mu([0, t] \times A),$$

а μ — мера скачков процесса X, т. е.

$$\mu([0, t] \times A) = \sum_{0 < s \leqslant t} I(\Delta X_s \in A)\, I(\Delta X_s \neq 0), \tag{4.46}$$

$$\Delta X_s = X_s - X_{s-},$$

причем $\int_0^t \int_{E^1} (x^2 \wedge 1)\, \nu(ds, dx) < \infty$.

Решение уравнения (4.44) есть так называемая *обобщенна экспонента* $\mathscr{E}(G(\lambda))_t$, т. е.

$$g_t(\lambda) \equiv \mathscr{E}(G(\lambda))_t = e^{G_t(\lambda)} \prod_{0 < s \leqslant t} (1 + \Delta G_s(\lambda))\, e^{-\Delta G_s(\lambda)}. \tag{4.47}$$

В том случае, когда исходный процесс является непрерывным по вероятности (равносильно — нет разрывов в фиксированные моменты времени как, скажем, у процесса $X_t=\sum_{k<t}\xi_k$), то B, C, ν непрерывны по t и характеристическая функция $g_t(\lambda)$ принимает вид

$$g_t(\lambda)=e^{G_t(\lambda)}, \tag{4.48}$$

поскольку тогда $\Delta G_t(\lambda)=0$.

Если, наконец, рассматриваемый процесс с независимыми приращениями является к тому же процессом с однородными приращениями, то

$$B_t=bt,\ C_t=ct,\ \nu(dt,\ dx)=dtF(dx),$$

где $c\geqslant 0$, $\int\limits_{E^1}(x^2\wedge 1)F(dx)$, и тогда

$$g_t(\lambda)=e^{t\left[i\lambda b-\frac{\lambda^2}{2}c+\int(e^{i\lambda x}-1-i\lambda h(x)F(dx)\right]}, \tag{4.49}$$

что есть не что иное, как представление Леви-Хинчина для характеристической функции однородного процесса с независимыми приращениями.

В аналитической теории вероятностей изучение свойств случайных процессов осуществляется путем прямого исследования их распределений. При этом метод характеристических функций является мощным средством исследования, особенно для таких процессов как, скажем, процессы с независимыми приращениями. Однако, как уже отмечалось, переход к более сложным процессам не дает возможности эффективно использовать метод характеристических функций.

2. Это обстоятельство заставляет искать другие пути исследований, один из которых основан на идеях потраекторного изучения случайных процессов, основываясь на стохастическом исчислении.

Поясним основную идею, используемую во всем дальнейшем, на примере процессов с независимыми приращениями. Оказывается, что всякий процесс с независимыми приращениями может быть представлен в следующем виде

$$X_t=X_0+B_t+X_t^c+\int\limits_0^t\int\limits_{E^1}h(x)\,d(\mu-\nu)+\int\limits_0^t\int\limits_{E^1}(x-h(x))\,d\mu, \tag{4.50}$$

где $B=(B_t)$ — это в точности та функция локально ограниченной вариации, которая входит в формулу для характеристической функции, $X^c=(X_t^c)$ — непрерывный гауссовский процесс с независимыми приращениями, μ — мера скачков и $\nu(dt,dx)=\mathrm{E}\mu(dt,dx)$.

Представление (4.50), называемое *каноническим*, в случае $h(x)=xI(|x|\leqslant 1)$ принимает вид

$$X_t=X_0+B_t+X_t^c+\int_0^t\int_{|x|\leqslant 1} xd(\mu-\nu)+\int_0^t\int_{|x|>1} xd\mu, \quad (4.51)$$

из которого следует, что $B=(B_t)$ естественно назвать трендом процесса X, член $\int_0^t\int_{|x|>1} xd\mu$ характеризует «большие» скачки у процесса X; X^c — это непрерывная мартингальная составляющая (поскольку X^c — непрерывный мартингал), а $\int_0^t\int_{|x|\leqslant 1} xd(\mu-\nu)$ — скачко-образная мартингальная составляющая (поскольку этот процесс есть чисто разрывный мартингал).

Обозначим $C_t=DX_t^c$ и назовем совокупность объектов

$$T=(B,\ C,\ \nu)-$$

триплетом характеристик процесса с независимыми приращениями.

Этот триплет T состоит из детерминированных объектов. При этом $C=(C_t)_{t\geqslant 0}$ — неубывающая непрерывная функция, $C_0=0$; $B=(B_t)_{t\geqslant 0}$ — функция локально ограниченной вариации со свойством, что $B_0=0$,

$$\Delta B_t=\int h(x)\nu(\{t\},\ dx);$$

$\nu=\nu(dt,\ dx)$ — мера на $R_+\times E^1$ такая, что

$$\nu(R_+\times\{0\})=0, \quad \nu(\{0\}\times E^1)=0,$$

$$\int_{(0,t]\times E^1}(|x|^2\wedge 1)\nu(ds,\ dx)<\infty, \quad t>0.$$

Весьма примечательно, что любой триплет $T=(B,\ C,\ \nu)$ объектов со сформулированными свойствами, однозначно определяет в пространстве $(\mathbf{D},\ \mathscr{D})$ вероятностную меру $\mathbf{P}$ такую, что канонический процесс $X_t(\alpha)=\alpha(t)$, $\alpha\in\mathbf{D}$, является (относительно этой меры $\mathbf{P}$) процессом с независимыми приращениями, для которого триплет T в точности совпадает с исходными. (Понятно, что этот результат есть обобщение того факта, что безгранично делимое распределение однозначно определяется его характеристиками $(b,\ C,\ F)$).

Доказательство этого факта основано на том, что рассматриваемая задача равносильна решению так называемой мартингальной проблемы, состоящей в следующем.

Образуем процесс

$$X(h)_t=X_t-\int_0^t\int_{E^1}(x-h(x))\,d\mu,$$

где μ — мера скачков канонического процесса (или, равносильно, пусть $X(h)=X-\check{X}(h)$, где $\check{X}(h)_t=\sum_{s\leqslant t}[\Delta X_s-h(\Delta X_s)]$) и пусть

$$M(h)_t=X(h)_t-X_0-B_t(h).$$

(Если обартимся к (4.50), то видим, что $M(h)$ есть мартингал). Обозначим также

$$\widetilde{C}_t=C_t+\int_0^t\int_{E^1}h^2(x)\nu(ds,\,dx)-\sum_{0<s\leqslant t}\left(\int_{E^1}h(x)\nu(\{s\},\,dx)\right)^2=$$

$$=C_t+\int_0^t\int_{E^1}h^2(x)\nu(ds,\,dx)-\sum_{0<s\leqslant t}(\Delta B_s)^2.$$

Оказывается, что вероятностная мера $\mathbf{P}$ на $(\mathbf{D},\,\mathscr{D})$ является мерой (канонического) процесса с независимыми приращениями $X_t(\alpha)=\alpha(t)$, $t\geqslant 0$, имеющего триплет $T=(B,\,C,\,\nu)$ в том и только том случае, когда (относительно этой меры $\mathbf{P}$) следующие процессы

1) $M(h)=(M(h)_t)_{t\geqslant 0}$,

2) $M^2(h)-\widetilde{C}$,

3) $g*\mu-g*\nu$, $g\in\mathscr{G}^+$

являются мартингалами. Здесь $\mathscr{G}$ (определяющий) класс ограниченных борелевских функций на E^1, равных нулю в окрестности нуля и таких, что если для двух мер η и $\widetilde{\eta}$ со свойством

$$h(\{0\})=\widetilde{\eta}(\{0\})=0,\quad \eta\,(x:|x|>\varepsilon)<\infty,\quad \eta'(x:|x|>\varepsilon)<\infty$$

имеем $\eta(f)=\widetilde{\eta}(f)$ для $f\in\mathscr{G}^+$, то $\eta=\widetilde{\eta}$; этот класс не пуст и существуют семейства $\mathscr{G}^+$, являющиеся, например, счетными и содержащими только непрерывные функции.

Частные случаи этой теоремы хорошо известны.

Пример 1. Если $X_0=0$, C_t — непрерывная неубывающая функция и $B=0$, $\nu=0$, то мартингальная проблема формулируется в виде:

1) $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ — мартингал,

2) $X^2-C=(X_t^2-C_t)_{t\geqslant 0}$ — мартингал.

Соответствующая мера P (притом единственная) относительно которой (в пространстве непрерывных на $[0,\,\infty)$ функций) есть не что иное как винеровская мера. Это утверждение носит название «теоремы Леви».

Пример 2. Пусть $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ — càdlàg функции, являющиеся кусочно-постоянными и со скачками размера $+1$, $X_0=0$. Если

$$B_t(h)=h(1)A_t,$$
$$C(t)=0,$$
$$\nu(dt,\,dx)=dA_t\otimes\varepsilon_1(dx),$$

где $A=(A_t)_{t\geq 0}$ неотрицательная непрерывная неубывающая функция (скажем, $A_t=\lambda t$, $\lambda>0$), а $\varepsilon_1(dx)$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке $x=1$, то (в каноническом пространстве указанных функций), существует одна и только одна вероятностная мера, относительно которой процесс X есть процесс Пуассона с $\mathbf{E}X_t=A_t$. Это утверждение есть теорема Ш. Ватанабэ.

Пример 3. Пусть

$$X_t=\sum_{k\leq t}\xi_k,\quad \xi_0=0,$$

— случайный процесс, порожденный суммой независимых случайных величин. Соответствующий триплет $T=(B,\ C,\ \nu)$ здесь имеет следующий вид

$$B_t=\sum_{k\leq t}\mathbf{E}h(\xi_k),$$

$$C_t=0,$$

$$\nu([0,\ t]\times g)=\sum_{k\leq t}\mathbf{E}\left[g(\xi_k)I(\xi_k)\neq 0)\right].$$

В этом случае «дискретная характеристика» ν полностью определяет триплет T. Меры $\nu(\{k\}\times dx)\,(=\mathbf{P}(\xi_k\in dx))$, $k\geq 1$ определяют распределение вероятностей процесса X и при этом (в координатном представлении) однозначно.

3. Обратимся теперь к условиям, обеспечивающим сходимость $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}(S)}X$ конечномерных распределений процессов с независимыми приращениями X^n к X (в моменты времени, принадлежащими множеству S).

Пусть $T^n=(B^n,\ C^n,\ \nu^n)$ и $T=(B,\ C,\ \nu)$ — их триплеты. Введем условия

$$(\beta-S)\quad B_s^n\to B_s,\quad s\in S,$$

$$(\gamma-S)\quad \tilde{C}_s^n\to C_s,\quad s\in S,$$

$$(\delta_i-S)\quad g*\nu_s^n\to g*\nu_s,\quad g\in C_i$$

Теорема 4.5. Предположим, что процесс с независимыми приращениями X не имеет фиксированных моментов скачков (равносильно, непрерывный по вероятности). Пусть также выполнено следующее условие асимптотической пренебрегаемости скачков у допредельных процессов X^n:

$$\lim_n\sup_{s<t}\nu^n(\{s\}\times\{|x|>\varepsilon\})=0,\quad \varepsilon>0,\quad t\in S. \tag{4.52}$$

Тогда выполнение условий $(\beta-S)$, $\gamma-S)$, $\delta_i-S)$ для $i=1$ или $i=2$ является необходимым и достаточным для слабой сходимости $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}(S)}X$.

Если к тому же множество S является всюду плотным в R_+, то условие $(\delta_1 - S) \Rightarrow (4.52)$ и значит

$$(\beta - S), \quad (\gamma - S), \quad (\delta_1 - S) \Rightarrow X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(S)} X. \tag{4.53}$$

Замечание 1. В (4.53) обратная импликация, вообще говоря, не верна. Вот пример.

Рассмотрим детерминированную функцию

$$X_t^n = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant \frac{2}{n}, \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}$$

и $X_t \equiv 0$. Тогда $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(S)} X$, но условие (4.52) не выполнено.

Замечание 2. Из теоремы 5 вытекает, конечно, и теорема 2 (о сходимости безгранично делимых распределений при условиях (4.40)) и теорема 3 (о сходимости распределений суммы асимптотически пренебрегаемых независимых случайных величин к безгранично делимому). Чтобы в этом убедиться достаточно положить $X_t^n = \sum^{[nt]} \xi_{nk}$, в качестве X взять однородный процесс с независимыми приращениями и характеристической функцией (4.49) и затем взять $S = \{1\}$.

Хотя теорема 2 есть частный случай теоремы 3 удобно их объединить в следующем виде.

Пусть ζ^n, $n \geqslant 1$, безгранично делимые случайные величины с триплетами (b^n, C^n, ν^n) и $(\xi_{nk})_{1 \leqslant k \leqslant n}$, $n \geqslant 1$, — треугольная схема асимптотически пренебрегаемых независимых (при каждом n) и независимых от ζ^n, $n \geqslant 1$ случайных величин. Пусть $h = h(x)$ — непрерывная функция урезания и пусть выполнены следующие условия:

$$\begin{gathered} b^n + \sum \mathrm{E} h(\xi_{nk}) \to b, \\ \widetilde{C}^n + \sum [\mathrm{E} h^2(\xi_{nk}) - (\mathrm{E} h(\xi_{nk}))^2] \to \widetilde{C}, \\ F^n(g) + \sum \mathrm{E} g(\xi_{nk}) \to F(g), \quad g \in C_1 \text{ или } g \in C_2, \end{gathered} \tag{4.54}$$

где $T = (b, C, F)$ — триплет безгранично делимой случайной величины ζ. Тогда

$$\zeta^n - \sum \xi_{nk} \xrightarrow{d} \zeta. \tag{4.55}$$

Для вывода этого результата из теоремы 5 достаточно определить, например, процессы

$$X_t^n = \zeta^n + \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk} I\left(t \geqslant \frac{1}{k}\right),$$

$$X_t \equiv \zeta$$

и в качестве множества S взять множество, состоящее из одной точки $S = \{1\}$.

Доказательство теоремы 5 проводится методом характеристических функций и основано на том факте, что характеристические функции

$$g_t^n(\lambda) = \mathbf{E} e^{i\lambda X_t^n} = \mathscr{E}(G^n(\lambda))_t,$$

$$g_t(\lambda) = \mathbf{E} e^{i\lambda X_t} = \mathscr{E}(G(\lambda))_t$$

явно определяются через триплеты T^n и T, поскольку

$$\mathscr{E}(G^n(\lambda))_t = e^{G_t^n(\lambda)} \prod_{0<s\leqslant t} \left(1 + \triangle G_s^n(\lambda)\right) e^{-\triangle G_s^n(\lambda)}$$

с

$$G_t^n(\lambda) = i\lambda B_t^n - \frac{\lambda^2}{2} C_t^n + \int_0^t \int_{E^1} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda h(x))\, \nu^n(ds, dx),$$

а (для непрерывного по вероятности процесса X)

$$\mathscr{E}(G(\lambda))_t = e^{G_t(\lambda)}$$

с

$$G_t(\lambda) = i\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} C_t + \int_0^t \int_{E^1} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda h(x))\, \nu(ds, dx).$$

Используя эти явные представления, показывается (так же, как и в классической теореме 2), что условия $(\beta - S)$, $(\gamma - S)$, $(\delta_i - S)$ $(i = 1$ или $2)$ обеспечивают сходимость характеристических функций соответствующих конечномерных распределений $\mathbf{P}^n_{s_1, \ldots, s_k}$ к $\mathbf{P}_{s_1, \ldots, s_k}$, $s_1, \ldots, s_k \in S$.

Имея условия сходимости конечномерных распределений, $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ S — плотно в R_+, естественно теперь поставить вопрос о выполнимости функциональной сходимости $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$, для чего достаточно найти условия для плотности семейства распределений $\{\mathbf{P}^n\}$ процессов X^n, $n \geqslant 1$. Действительно, здесь опять-таки (для установления сходимости $X^n \to X$) можно воспользоваться методом, основанным на трех этапах I⊕II⊕III («плотность» ⊕ «характеризация» ⊕ «идентификация»), поскольку плотность семейства $\{\mathbf{P}^n\}$ вместе со сходимостью конечномерных распределений обеспечивают, то, что все слабые пределы $\mathbf{P}' = w\text{-}\lim \mathbf{P}^{n'}$ характеризуются тем, что конечномерные распределения у $\mathbf{P}'$ совпадают с конечномерными распределениями у $\mathbf{P}$. Но в пространстве Скорохода σ-алгебра цилиндрических множеств $\mathscr{B}_{\text{ц}}(\mathbf{D})$ совпадает с борелевской σ-алгеброй $\mathscr{B}(\mathbf{D})$, и меры на $\mathscr{B}_{\text{ц}}(\mathbf{D})$ полностью определяются своими конечномерными распределениями. Тем самым факт сходимости конечномерных распределений идентифицирует все слабые пределы $\mathbf{P}'$-$\mathbf{P}$, а значит, w-lim $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}$.

Имеет место такой результат

Теорема 4.6. Пусть выполнены условия

$$(\text{sup-}\beta)\ \sup_{s\leqslant t} |B_s^n - B_s| \to 0, \quad t > 0,$$

и $(\gamma - S)$, $(\delta_1 - S)$ для некоторого всюду плотного множества S в R_+. Тогда последовательность $\{\mathbf{P}^n\}$ плотна.

К вопросу установления (мартингальными методами) плотности семейства $\{\mathbf{P}^n\}$, являющихся распределениями вероятностей достаточно широкого класса процессов X^n, $n \geqslant 1$ (в нижеследующем контексте — семимартингалов) мы вернемся несколько позже. Из теорем же 4.5 и 4.6 вытекает следующий результат о сходимости $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

Теорема 4.7. Пусть X^n — процессы с независимыми приращениями, $T^n = (B^n, C^n, \nu^n)$ — их триплеты. Пусть X — процесс с независимыми приращениями, без фиксированных моментов скачков и триплетом $T = (B, C, \nu)$.

Тогда условия

$$(\text{sup-}\beta)\ \sup_{s\leqslant t} |B_s^n - B_s| \to 0, \quad t > 0,$$

$$(\gamma)\ \widetilde{C}_t^n \to C_t, \quad t > 0,$$

$$(\delta)\ g * \nu_t^n \to g * \nu_t, \quad t > 0, \quad g \in C_1 \text{ или } C_2,$$

являются достаточными (а также и необходимыми) для того, чтобы $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

Из этой теоремы можно вывести несколько полезных следствий.

Следствие 1. Пусть X^n и X являются процессами без фиксированных моментов скачков. Тогда $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ в том и только том случае, когда имеет место сходимость всех конечномерных распределений $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(R_+)} X$, и выполнено условие (sup-β).

Следствие 2. Пусть X^n и X являются процессами со стационарными независимыми приращениями. Тогда $B_t^n = b^n \circ t$, $C_t^n = c^n \circ t$, $\nu^n(dt, dx) = dt F(dx)$, $B_t = b \circ t$, $C_t = c \circ t$, $\nu(dt, dx) = dt F(dx)$ и следующие условия являются эквивалентными:

$$\text{a) } X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X,$$

$$\text{b) } X_1^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X_1,$$

$$\text{c) } b^n \to b, \quad \widetilde{C}^n \to \widetilde{C}, \quad F_n(g) \to F(g), \quad g \in G_1.$$

Следствие 3 (Донскер [30]). Пусть $(\xi_k)_{k\geqslant 1}$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathbf{E}\xi_k=0$, $\mathbf{E}\xi_k^2=1$. Тогда процессы

$$X_t^n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{1\leqslant k\leqslant[nt]}\xi_k,\quad t>0,$$

сходятся по распределению к винеровскому процессу.

Действительно, поскольку здесь мы имеем дело с квадратично интегрируемым случаем, то в качестве функции $h=h(x)$ можно взять просто функцию $h(x)=x$. Тогда

$$B_t^n=\sum_{k\leqslant[nt]}\mathbf{E}\left(\frac{\xi_k}{\sqrt{n}}\right)=0,$$

$$\widetilde{C}_t^n=\sum_{k\leqslant[nt]}\mathbf{E}\left(\frac{\xi_k}{\sqrt{n}}\right)^2=\frac{[nt]}{n}\to t,$$

$$g*\nu_t^n=\sum_{k\leqslant[nt]}\mathbf{E}g\left(\frac{\xi_k}{\sqrt{n}}\right)=[nt]\,\mathbf{E}g\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{n}}\right).$$

Заметим, что для $g\in C$, с некоторой константой c

$$|g(x)|\leqslant c\,|x|^2 I\{|x|>a\},$$

и поскольку

$$|x|^2 I(|x|>a)*\nu_t^n=[nt]\frac{1}{n}\mathbf{E}(|\xi_1|^2 I(|\xi_1|>a\sqrt{n}))\to 0,$$

то выполнено условие (δ).

Остановимся на доказательстве теоремы 4.7.

Достаточность, как уже отмечалось выше, основана на проверке плотности и сходимости конечно-мерных распределений, которая в свою очередь опирается, в сущности, на классический результат — теорему 4.6. Сложнее дело обстоит с необходимостью. Оказывается, однако, что метод доказательства (см. [40]) необходимости условий типа теоремы 4.7 оказывается «работает» и без предположения, что процесс X не имеет фиксированных моментов скачков. Более того, «метод необходимых условий» оказывается полезным и для доказательства достаточности в общей ситуации процессов с независимыми приращениями X и X^n, $n\geqslant 1$.

Остановимся на сути «метода необходимых условий».

Ключевым результатом является следующий.

Теорема 4.8. Предположим, что Y и Y^n, $n\geqslant 1$, процессы с независимыми приращениями, $Y^n\xrightarrow{\mathscr{L}}Y$ и для каждого $t\geqslant 0$ семейство случайных величин $\{\sup_{s\leqslant t}|Y_s^n|\}_{n\geqslant 1}$ равномерно интегрируемо. Тогда если $\mathscr{L}_n(t)=\mathbf{E}Y_t^n$ и $\mathscr{L}(t)=\mathbf{E}Y_t$, то $\mathscr{L}_n\to\mathscr{L}$ в топологии Скорохода.

Основываясь на этом результате доказывается следующий общий факт.

Теорема 4.9. Для того чтобы $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$, где X и X^n — процессы с независимыми приращениями, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия

$$\begin{aligned} &(S_k = \beta) \quad S_k(B^n, B) \to 0, \\ &(S_k = \gamma) \quad S_k(\widetilde{C}^n, \widetilde{C}) \to 0, \qquad (4.56) \\ &(S_k = \delta) \quad S_k(g * \nu^n, g * \nu) \to 0, \end{aligned}$$

где $S_k(\alpha, \beta)$ — расстояние, совместимое с топологией Скорохода, например, расстояние $\delta(\alpha, \beta)$, введенное в § 2.

Доказательство теоремы проходит следующим образом. Сначала устанавливается (на основе теоремы 8) необходимость условий (S_k-β), (S_k-γ), (S_k-δ). Затем для доказательства достаточности поступаем так.

Первым делом устанавливаем, что эти условия обеспечивают плотность семейства $\{X^n\}$. (К вопросам этого типа мы вернемся несколько позже). Поэтому остается доказать, что все слабые пределы $\mathbf{P}' = w\text{-}\lim \mathbf{P}^{n'}$ совпадают с распределением $\mathbf{P}$ процесса X. Пусть соответствующий предельный процесс X' имеет триплет $T' = (B', C', \nu')$. Тогда в силу необходимости $S_k(B^{n'}, B') \to 0$, $S_k(\widetilde{C}^{n'}, \widetilde{C}) \to 0$, $S_k(g * \nu^{n'}, g * \nu) \to 0$, $g \in C_1$ и значит, в силу условий (4.56), $B' = B$, $C' = C$, $\nu' = \nu$.

4. В качестве конекретизации вышеприведенных результатов рассмотрим вопрос об условиях сходимости к непрерывному гауссовскому процессу X с триплетом $(B, C, 0)$.

Теорема 4.10. Пусть X^n — процессы с независимыми приращениями, для которых $|x|^2 * \nu_t^n < \infty$ и выполнено условие Линдеберга

$$(L) \quad |x|^2 I(|x| > \varepsilon) * \nu_t^n \to 0, \ \varepsilon > 0, \ t \in S \subseteq R_+.$$

Тогда

$$\text{а) } X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(S)} X, \text{ если и только если}$$

$$B_t^n \to B_t, \ t \in S,$$

$$\widetilde{C}_t^n \to C_t, \ t \in S,$$

(с функцией $h(x) = x$),

$$\text{в) } X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X, \text{ если и только если}$$

$$\sup_{s \leq t} |B_s^n - B_s| \to 0, \ t \geq 0,$$

и

$$\widetilde{C}_t^n \to C_t, \ t \geq 0.$$

§ 5. Сходимость семимартингалов к процессам с независимыми приращениями

1. Изучив вопросы сходимости конечномерных распределений $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(S)} X$ и сходимости $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ для процессов с независимыми приращениями (и действуя при этом для сходимости $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(S)} X$ методом характеристических функций, а для сходимости $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ — методом, основанным на проверке плотности семейства $\{X^n\}$ и установления сходимости конечно-мерных распределений) естественно перейти к изучению вопросов сходимости в более общей ситуации. С этой целью, сначала мы предполагаем, что «предельный» процесс X снова является процессом с независимыми приращениями, зато допредельные процессы X^n будут процессами более общей природы.

Труден и принципиален вопрос о том, сколь широк может быть запас процессов X^n с тем, чтобы для них можно было бы ввести аналог рассмотренных выше триплетов T^n и чтобы форма ответа была бы, к примеру, таковой:

$$«T^n \to T \Rightarrow X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X»,$$

где «сходимость $T^n \longrightarrow T$» понимается в подходящем смысле.

Сразу отметим, что анализ доказательства предшествующих теорем для процессов X с независимыми приращениями показывает, что возникновение триплета $T = (B, C, \nu)$ было навеяно каноническим представлением (50):

$$X_t = X_0 + B_t + X_t^c + \int_0^t \int_{E^1} h(x)\, d(\mu - \nu) + \int_0^t \int_{E^1} (x - h(x))\, d\mu. \quad (4.57)$$

Отметим также, что здесь процесс

$$M_t = X_t^c + \int_0^t \int_{E^1} h(x)\, d(\mu - \nu) \quad (4.58)$$

является мартингалом, а процесс

$$A_t = B_t + \int_0^t \int_{E^1} (x - h(x))\, d\mu \quad (4.59)$$

— процессом локально ограниченной вариации и $X_t = X_0 + M_t + A_t$.

В этой связи давайте сейчас рассматривать такие случайные процессы, X, которые можно представить в виде

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \quad (4.60)$$

где $M=(M_t)_{t\geq 0}$ — произвольный процесс «мартингального» типа, а $A=(A_t)_{t\geq 0}$ — произвольный процесс локальной ограниченной вариации.

Развитие общей теории случайных процессов показало, что соответствующая формализация предполагает введение понятия «стохастический базис» и понятия «локального мартингала», определяемых следующим образом.

2. Аксиоматика теории вероятностей, предложенная Колмогоровым, подразумевает, что задана тройка $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, где множество Ω трактуется как множество элементарных исходов ω, $\mathscr{F}$ σ-алгебра подмножеств $A\subseteq\Omega$, называемых событиями и $\mathbf{P}=\mathbf{P}(A)$, $A\in\mathscr{F}$, — счетно-аддитивная функция множеств такая, что $0\leqslant\mathbf{P}\leqslant 1$ и $\mathbf{P}(\Omega)=1$.

Для стохастического исчисления (и для всего дальнейшего) важно, чтобы в измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$ был выделен еще поток σ-подалгебр $\mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, где $\mathscr{F}_s\subseteq\mathscr{F}_t\subseteq\mathscr{F}$, $s\leqslant t$. Мы трактуем $\mathscr{F}_t$ как совокупность событий наблюдаемых до момента времени t (включительно) и набор объектов $\mathscr{B}=(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$ называем *стохастическим базисом* (с дополнительными предположениями чисто технического характера, что семейство $\mathbf{F}$ непрерывно справа, т. е. $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}\equiv\bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s$ и $\mathscr{F}_0$ пополнены $\mathbf{P}$-нулевыми множествами из $\mathscr{F}$).

Предположение о наличии дополнительной структуры $\mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ дает возможность введения и эксплуатации новых понятий таких как, например, моменты остановки, предсказуемость, локальный мартингал и т. п.

Для нас важным сейчас является общее определение мартингала $M=(M_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ как такого процесса $(M_t)_{t\geqslant 0}$, заданного на стохастическом базисе $\mathscr{B}$, что

1) M_t—$\mathscr{F}_t$-измеримы, $t\geqslant 0$,

2) $\mathbf{E}(M_t|\mathscr{F}_s)=M_s$, $s<t$.

Говорят также, что отображение $\tau=\tau(\omega)$; $\Omega\to\bar{R}_+$ есть момент остановки, если оно таково, что $\{\omega:\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$ для любого $t\geqslant 0$.

Понятия «мартингал» и «момент остановки» приводят к новому понятию «локальный мартингал» как такого случайного процесса $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$, что X_t — $\mathscr{F}_t$-измеримы, $t\geqslant 0$, и существует последовательность $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ марковских моментов со свойством $\lim_n \tau_n=\infty$ ($\mathbf{P}$-п. н.), что при каждом n «остановленный» процесс $X^{\tau_n}=(X_{t\wedge\tau_n})$ является мартингалом. Если $\mathscr{M}$ — класс мартингалов, а $\mathscr{M}_{\text{loc}}$ — класс локальных мартингалов, то

$$\mathscr{M}\subseteq\mathscr{M}_{\text{loc}},$$

поскольку каждый мартингал является локальным мартингалом (надо взять $\tau_n\equiv n$).

Будем говорить также, что случайный процесс $A=(A_t)_{t\geqslant 0}$ является процессом класса $\mathscr{V}$, или процессом локально ограниченной вариации, если на любом интервале $[0, t]$ траектории $A_s(\omega)$, $s\in[0, t]$, имеют ограниченную вариацию для любого $\omega\in\Omega$ и A_t—$\mathscr{F}_t$-измеримы, $t\geqslant 0$.

3. Теперь мы в состоянии дать определение важного для нас понятия «семимартингал».

Мы говорим, что процесс $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$, заданный на стохастическом базисе $\mathscr{B}=(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$, является семимартингалом, если X_t—$\mathscr{F}_t$-измеримы, $t\geqslant 0$, и возможно представление (вообще говоря, неоднозначное) вида

$$X_t=X_0+M_t+A_t, \tag{4.61}$$

где M — локальный мартингал ($M\in\mathscr{M}_{\text{loc}}$), а A — процесс локально ограниченной вариации ($A\in\mathscr{V}$).

Для дальнейшего нам понадобится важное понятие предсказуемой σ-алгебры $\mathscr{P}$ и предсказуемого процесса.

По определению σ-алгебра $\mathscr{P}$ подмножеств в пространстве $\Omega\times R_+=\{(\omega, t) : \omega\in\Omega, t\in R_+\}$ называется σ-алгеброй предсказуемых множеств, если она порождена всеми непрерывными слева процессами $Y=Y(\omega, t)$, рассматриваемыми как отображения $\Omega\times R_+$ в R, являющимися при каждом t $\mathscr{F}_t$-измеримыми. (Равносильным образом σ-алгебру $\mathscr{P}$ можно определить как систему, порожденную множествами вида $A\times\{0\}$, где $A\in\mathscr{F}_0$ и $A\times(s, t]$, $s<t$, $A\in\mathscr{F}_s$ или как систему, порожденную множествами вида $A\times\{0\}$, где $A\in\mathscr{F}_0$ и стохастическими интервалами $[0,\tau]=\{(\omega, t) : 0\leqslant t\leqslant\tau(\omega)\}$, где $\tau=\tau(\omega)$ — моменты остановки).

Случайный процесс $Y=(Y_t(\omega))_{t\geqslant 0}$ называется предсказуемым, если он и рассматриваемый как отображение $\Omega\times R_+$ в E^1, измерим относительно σ-алгебры $\mathscr{P}$:

$$\{(\omega, t) : Y_t(\omega)\in B\}\in\mathscr{P}$$

для всякого борелевского множества B в E^1.

Термин «предсказуемый» процесс оправдан тем, что процесс, у которого траектории непрерывны слева, обладает тем свойством, что по значениям Y_s, $s<t$, можно восстановить значение Y_t. Всякий детерминированный процесс является, разумеется, предсказуемым. Тем самым, «предсказуемость» можно интерпретировать как «стохастическую детерминированность».

Весьма примечательно, что всякий семимартингал $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$, заданный на стохастическом базисе $\mathscr{B}$, допускает (каноническое) представление

$$X_t(\omega)=X_0+B_t(\omega)+X_t^c(\omega)+$$
$$+\int_0^t\int_{E^1} h(x)\,d(\mu-\nu)+\int_0^t\int_{E^1}(x-h())\,d\mu \tag{4.62}$$

внешне напоминающее представление (4.57) для процессов с независимыми приращениями и отличающееся от него лишь тем, что вместо детерминированных B, ν и непрерывного гауссовского процесса X с независимыми приращениями здесь, в (4.62),

1) $B=(B_t(\omega))_{t\geqslant 0}$ является предсказуемым процессом класса $\mathscr{V}$,

2) $X^c=(X_t^c(\omega))_{t\geqslant 0}$ — непрерывная мартингальная составляющая X,

3) ν — компенсатор меры скачков μ процесса X; $(x^2\wedge 1)*\nu\equiv \equiv\int\limits_0^t\int\limits_{E^1}(x^2\wedge 1)\,d\nu$ — локально интегрируем и

$$\Delta B_t=\int\limits_{E^1}h(x)\,\nu(\{t\}\times dx).$$

Напомним, что всякий непрерывный мартингал является локально квадратично-интегрируемым и по теореме Дуба—Мейера существует такой возрастающий предсказуемый процесс $\langle X^c\rangle$, что $(X^c)^2-\langle X^c\rangle$ есть локальный мартингал. Этот процесс $\langle X^c\rangle$ мы будем обозначать через $C=(C_t(\omega))_{t\geqslant 0}$ и он называется *квадратической характеристикой* X^c. Напомним также, что компенсатор $\nu=\nu(\omega;\,dx,\,dt)$ меры скачков $\mu= =\mu(\omega;\,dx,\,dt)$ процесса X определяется как такая неотрицательная предсказуемая случайная мера, что

$$g*\mu-g*\nu\left(=\int\limits_0^t\int\limits_{E^1}g(x)\,\mu(\omega;\,dx,\,ds)-\int\limits_0^t\int\limits_{E^1}g(x)\,\nu(\omega;\,dx,\,ds)\right)\quad(4.63)$$

является локальным мартингалом (для достаточно широкого класса ограниченных неотрицательных борелевских функций $g=g(x)$, исчезающих в окрестности нуля).

Набор

$$T=(B,\ C,\ \nu)\qquad(4.64)$$

называется *триплетом предсказуемых характеристик* семимартингала X.

Для семимартингала X компенсатор ν его меры скачков удовлетворяет тому свойству, что процесс

$$(|x|^2\wedge 1)*\nu\left(=\int\limits_0^t\int\limits_{E^1}(|x|^2\wedge 1)\,d\nu\right)\qquad(4.65)$$

является локально интегрируемым, а

$$\Delta B_t=\int h(x)\,\nu(\{t\}\times dx),\ t>0.\qquad(4.66)$$

Для того, чтобы объяснить откуда для семимартингалов возникает представление (4.62), положим

$$\check{X}(h)_t=\sum_{0<s\leqslant t}[\Delta X_s-h(\Delta X_s)]=\int\limits_0^t\int\limits_{E^1}(x-h(x))\,d\mu$$

и пусть

$$X(h)_t = X_t - \check{X}_t(h) = X_t - \int_0^t \int_{E^1} (x - h(x))\, d\mu \tag{4.67}$$

— процесс с ограниченными скачками. Известно, что всякий такой процесс $X(h)$ допускает и притом единственное представление

$$X(h) = X_0 + M(h) + B(h) \tag{4.68}$$

с $M(h) \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ и предсказуемым процессом $B(h) \in \mathcal{V}$. В свою очередь локальный мартингал $M(h)$ может быть записан в виде

$$M(h)_t = M^c(h)_t + M^d(h)_t, \tag{4.69}$$

где $M^c(h)$ — непрерывный локальный мартингал, а $M^d(h)$ — чисто разрывный локальный мартингал, представимый в виде

$$M^d(h)_t = \int_0^t \int_{E^1} h(x)\, d(\mu - \nu). \tag{4.70}$$

Из (4.67)—(4.70) получаем вышеприведенное представление (4.62):

$$X_t = X_0 + B(h)_t + M^c(h)_t + \int_0^t \int_{E^1} h(x)\, d(\mu - \nu) + \int_0 \int_{E^1} (x - h(x))\, d\mu.$$

Здесь процесс $M^c(h)$ — непрерывный локальный мартингал, не зависящий от выбора функции «урезания» h и являющийся тем самым, так сказать, «внутренней» характеристикой процесса X. Этот процесс обозначается X^c и называется непрерывной мартингальной составляющей семимартингала X. Компенсатор ν также не зависит от h и тоже является «внутреней» характеристикой X.

3. Уместно сейчас отметить связь семимартингала X с триплетом $T = (B, C, \nu)$ и некоторой «мартингальной проблемой». Именно, справедлив такой результат.

Теорема 4.11. Условие

a) X есть семимартингал с триплетом $T = (B, C, \nu)$ равносильно условию

b) процессы

$$M(h) \equiv X(h) - X_0 - B, \qquad M^2(h) - C, \qquad g * \mu - g * \nu$$

являются локальными мартингалами ($g \in \mathcal{G}^+(R_+)$).

4. Перейдем теперь к изложению результатов о сходимости $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(S)} X$ и сходимости $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ семимартингалов X^n к процессу с независимыми приращениями. При этом будем стремиться к тому, чтобы дать ответ в символическом виде

$$«T^n \xrightarrow{(S)} T \Rightarrow X^n \overset{\mathscr{L}(S)}{\dashrightarrow} X», \tag{4.71}$$

$$«T^n \to T \Rightarrow X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X», \tag{4.72}$$

понимая под сходимостью триплетов подходящую сходимость их компонент.

Что касается конечномерной сходимости (4.71), то здесь естественно снова было бы пытаться применить метод характеристических функций. Однако, непосредственная проверка того, что, скажем, одномерные распределения у X_t^n сходятся к одномерным распределениям X_t не так уж и просто поскольку трудно выразить в терминах триплетов характеристическую функцию

$$g_t^n(\lambda) = \mathrm{E}e^{i\lambda X_t^n}.$$

Для процесса X с независимыми приращениями характеристическая функция

$$g_t(\lambda) = \mathrm{E}e^{i\lambda X_t}$$

как было указано в (4.47) имеет простой вид:

$$g_t(\lambda) = \mathscr{E}(G(\lambda))_t = e^{G_t(\lambda)} \prod_{0<s\leqslant t} (1 + \Delta G_s(\lambda)) e^{-\Delta G_s(\lambda)}, \tag{4.73}$$

где

$$G_t(\lambda) = i\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} G_t + \int_0^t \int_{E^1} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda h(x)) \nu(ds, dx). \tag{4.74}$$

Для произвольного семимартингала X^n также можно ввести соответствующие кумулянты

$$G_t^n(\lambda) = i\lambda B_t^n - \frac{\lambda^2}{2} C_t^n + \int_0^t \int_{E^1} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda h(x)) \nu^n(ds, dx), \tag{4.75}$$

существующие, поскольку процесс $(x^2 \wedge 1) * \nu$ — локально интегрируем.

Как связаны между собой стохастические экспоненты $\mathscr{E}(G^n(\lambda))_t$ и характеристические функции $g_t^n(\lambda) = \mathrm{E}e^{i\lambda X_t^n}$ процесса X^n? Этот вопрос вполне правомерен, если иметь в виду, что для процессов X с независимыми приращениями $g_t(\lambda) = \mathrm{E}e^{i\lambda X_t} = \mathscr{E}(G(\lambda))_t$.

Можно было бы думать, что $g_t^n(\lambda)$ есть $\mathrm{E}\mathscr{E}(G^n(\lambda))_t$, но это не так! На самом деле, справедлив следующий результат.

Теорема 4.12. Пусть $\mathscr{E}(G(\lambda))$ не обращается в нуль при всех $\lambda \in E^1$. Процесс X^n есть семимартингал с триплетом $T^n = (B^n, C^n, \nu^n)$ тогда и только тогда, когда при каждом $\lambda \in E^1$ процесс

$$\frac{e^{i\lambda X^n}}{\mathscr{E}(G^n(\lambda))} \tag{4.76}$$

является локальным мартингалом.

Таким образом (в условиях теоремы) можно утверждать, что

$$e^{i\lambda X_t^n} = \mathscr{E}(G^n(\lambda))_t m^n(\lambda)_t,$$

где $m^n(\lambda)$ — локальный мартингал и значит характеристическая функция

$$g^n(\lambda)_t = \mathbf{E}\mathscr{E}(G^n(\lambda))_t m^n(\lambda)_t.$$

Локально мартингал $m^n(\lambda)$ «плохо контролируется» с точки зрения его свойств, однако, уже только свойство «мартингальности» $m^n(\lambda)$ оказывается вполне достаточно емким для последующих (как, впрочем, и многих других) рассмотрений. (В общем случае, когда $\mathscr{E}(G^n(\lambda))$ обращается в нуль соответствующий аналог теоремы 4.12 также существует, но формулировка много сложнее).

Теорема 4.13. Пусть «предельный» процесс X является процессом с независимыми приращениями без фиксированных моментов скачков, т. е. $g(\lambda)_t \neq 0$ для всех λ и t. Если

$$\mathscr{E}(G^n(\lambda))_t \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\lambda)_t = \mathscr{E}(G(\lambda))_t, \quad t \in S, \tag{4.77}$$

то $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(S)} X$, т. е. имеет место слабая сходимость конечномерно распределений в моменты времени, принадлежащими множеству S.

Идею доказательства этой теоремы можно пояснить следующим образом, ограничившись одномерным случаем, $S = \{t\}$.

Согласно методу характеристических функций все, что надо доказать, это доказать сходимость характеристических функций

$$g^n(\lambda)_t \to g(\lambda)_t, \quad \lambda \in E^1,$$

или, что

$$\frac{g^n(\lambda)_t}{g(\lambda)_t} - 1 \to 0, \ \lambda \in E^1, \tag{4.78}$$

поскольку $g(\lambda)_t \neq 0$. Но в силу (4.76), считая $X_0^n \equiv 0$, находим, что

$$1 = \mathbf{E}\, \frac{e^{i\lambda X_t^n}}{\mathscr{E}(G(\lambda))_t}.$$

Поэтому (4.78) равносильно тому, что

$$\mathbf{E}\left[\frac{e^{i\lambda x_t^n}}{\mathscr{E}(G(\lambda))_t}-\frac{e^{i\lambda X_t^n}}{\mathscr{E}(G^n(\lambda))_t}\right]\to 0,$$

для чего, конечно, достаточно, чтобы

$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{\mathscr{E}(G(\lambda))_t}-\frac{1}{\mathscr{E}(G^n(\lambda))_t}\right]\to 0,\quad n\to\infty. \tag{4.79}$$

Если

$$\frac{1}{\mathscr{E}(G(\lambda))_t}+\frac{1}{\mathscr{E}(G^n(\lambda))_t}\leqslant C(\lambda, t),$$

то (4.79) следует из (4.77) и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Общий случай сводится к рассмотренному с помощью введения подходящих моментов остановки.

Сходимость стохастических экспонент $\mathscr{E}(G^n(\lambda))_t$ к $\mathscr{E}(G(\lambda))_t$, обеспечивающая сходимость соответствующих характеристических функций $g^n(\lambda)_t$ к $g(\lambda)_t$, послужила основой того, что импликация $(4.77)\Rightarrow X^n\xrightarrow{\mathscr{L}(S)}X$ получила название *метода «стохастических экспонент»*.

В случае, когда процессы X^n к тому же являются процессами с независимыми приращениями, сходимость (4.77) обращается просто в сходимость характеристических функций. Так что в этом случае метод стохастических экспонент совпадает с методом характеристических функций.

Тот факт, что коммулянты $G^n(\lambda)$ и $G(\lambda)$ выражаются через триплеты T^n и T, дает надежду, что сходимость (4.77) можно выразить с помощью подходящей сходимости триплетов T^n к T. Следующая теорема конкретизирует эту идею.

Теорема 4.14. Предположим, что процесс X не имеет фиксированных моментов разрывов (эквивалентно, $\nu(\{t\}\times E^1)=0$ для всех $t\in R_+$, так что B и $\tilde{C}$ — непрерывны). Предположим, что

$$\sup_{s\leqslant t}\nu^n(\{s\}\times\{|x|\geqslant\varepsilon\})\xrightarrow{\mathbf{P}}0,\ t\in S,\ \varepsilon>0, \tag{4.80}$$

и что выполнены условия

$$(\beta)\quad B_t^n\xrightarrow{\mathbf{P}}B_t,\quad t\in S,$$

$$(\gamma)\quad \tilde{C}_t^n\xrightarrow{\mathbf{P}}\tilde{C}_t,\ t\in S,$$

$$(\delta)\quad g*\nu_t^n\xrightarrow{\mathbf{P}}g*\nu_t,\quad t\in S,\quad g\in C_1.$$

Тогда $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}(S)}X$.

Если S всюду плотно в R_+, то условие (δ) обеспечивает условие (4.80) (так что в этом случае для сходимости достаточно выполнения условий (β), (γ), (δ)).

5. Естественно теперь перейти к функциональному случаю. Поскольку имеются уже условия для сходимости конечномерных распределений, то самый простой путь состоял бы в том, чтобы выяснить, а не обеспечивают ли условия (β), (γ), (δ) или их усиления относительную компактность (плотность) семейства распределений процессов X^n, $n \geqslant 1$. Оказывается достаточно лишь усилить условие (β):

Теорема 4.15. Пусть X — процесс с независимыми приращениями без фиксированных моментов разрыва. Тогда, если S — всюду плотное множество в R_+, то условие

$$(\sup \beta) \quad \sup_{s \leqslant t} |B_s^n - B_s| \to 0, \quad t \in S, \tag{4.81}$$

и условия (γ), (δ) обеспечивают плотность семейства распределений процессов X^n, $n \geqslant 1$, и функциональную сходимость $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

Сейчас целесообразно посмотреть, что дает эта теорема для треугольной схемы серий

$$X_t^n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant [nt]} \xi_n^k, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{4.82}$$

Во-первых, отметим, что в этом случае

$$G_t^n(\lambda) = \sum_{k \leqslant [nt]} \int_{E^1} (e^{i\lambda x} - 1)\, \nu(\{k\} \times dx) = \sum \mathbf{E}\left[e^{i\lambda \xi_k^n} - 1 \mid \mathscr{F}_{k-1}^n\right],$$

$$\mathscr{E}(G^n(\lambda))_t = \prod_{k \leqslant [nt]} \mathbf{E}\left[e^{i\lambda \xi_k^n} \mid \mathscr{F}_{k-1}^n\right].$$

Далее,

$$B_t^n = \sum_{k \leqslant [nt]} \mathbf{E}\left[h(\xi_k^n) \mid \mathscr{F}_{k-1}^n\right],$$

$$C_t^n = 0,$$

$$\nu([0, t] \times g) = \sum_{k \leqslant [nt]} \mathbf{E}\left[g(\xi_k^n)\, I(\xi_k^n \neq 0) \mid \mathscr{F}_{k-1}^n\right].$$

Тогда, если $\mu = \mu(a, b, F)$ — безгранично делимое распределение с параметрами (b, C, F) и если выполнены условия

$$\sup_{k \leqslant n} \mathbf{P}\left(|\xi_k^n| > \varepsilon \mid \mathscr{F}_{k-1}^n\right) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \tag{4.80$'$}$$

$$(\beta') \quad \sum_{k \leqslant n} \mathbf{E}\left[h(\xi_k^n) \mid \mathscr{F}_{k-1}^n\right] \xrightarrow{\mathbf{P}} b,$$

$$(\gamma')\ \sum \left\{\mathbf{E}\left[h^2(\xi_k^n)\mid \mathscr{F}_{k-1}^n\right]-\left(\mathbf{E}\left[h(\xi_k^n)\mid \mathscr{F}_{k-1}^n\right]\right)^2\right\}\xrightarrow{\mathbf{P}}\widetilde{C}=C+$$

$$+\int h^2(x)F(dx),$$

$$(\delta')\ \sum \mathbf{E}\left[g(\xi_k^n)\mid \mathscr{F}_{k-1}^n\right]\xrightarrow{\mathbf{P}} F(g),\quad g\in C_1,$$

то $\mathscr{L}\left(\sum\limits_{k\leqslant n}\xi_k^n\right)\to\mu$.

Если же X — процесс с независимыми приращениями без фиксированных моментов скачков и триплетом $T=(B, C, \nu)$, то для функциональной сходимости $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$ достаточно, чтобы

$$(\sup\beta')\ \sup_{s\leqslant t}\left|\sum_{k\leqslant[ns]}\mathbf{E}\left[h(\xi_k^n)\mid \mathscr{F}_{k-1}^n\right]-B_s\right|\xrightarrow{\mathbf{P}}0,$$

$$(\gamma')\ \sum_{k\leqslant[nt]}\left\{\mathbf{E}\left[h^2(\xi_k^n)\mid \mathscr{F}_{k-1}^n\right]-\left(\mathbf{E}\left(h(\xi_k^n)\mid \mathscr{F}_{k-1}^n\right]\right)^2\right\}\xrightarrow{\mathbf{P}}\widetilde{C}_s,\ s\leqslant 1,$$

$$(\delta')\ \sum_{k\leqslant[nt]}\mathbf{E}\left[g(\xi_k^n)\mid \mathscr{F}_{k-1}^n\right]\xrightarrow{\mathbf{P}}(g*\nu)_s,\quad s\leqslant 1,\quad g\in C_1.$$

6. Приведем ряд других условий (также выраженных в предсказуемых терминах) для сходимостей $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}(S)}X$ и $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$.

Во-первых, если $g_t(\lambda)\neq 0$, то как уже мы знаем из теоремы 4.13 условие

$$\mathscr{E}(G^n(\lambda)_t)\to g(\lambda)_t,\quad t\in S,\quad \lambda\in E^1\Rightarrow X^n\xrightarrow{\mathscr{L}(S)}X.$$

Естественен поэтому вопрос: как усилить здесь сходимость стохастических экспонент, чтобы иметь функциональную сходимость?

Теорема 4.16. Пусть процесс X с независимыми приращениями не имеет фиксированных моментов скачков ($g_t(\lambda)\neq\neq 0$). Тогда, если

$$\sup_{|\lambda|\leqslant\theta}\sup_{s\leqslant t}|\mathscr{E}(G^n(\lambda))_s-g(\lambda)_s|\xrightarrow{\mathbf{P}}0,\quad t>0,\quad \theta>0,\tag{4.83}$$

то $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$.

Во-вторых, можно пойти и дальше, а именно попытаться дать условия сходимостей $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}(S)}X$ и $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$ в терминах сходимости соответствующих кумулянт $G^n(\lambda)$ к $G(\lambda)$. Общий результат здесь не известен, но если не только X, но и X^n квазинепрерывны слева (т. е. если $\tau^k\uparrow\tau$, то $X_{\tau_k}^n\to X_\tau^n$ п. н.), то

$$G^n(\lambda)_t\xrightarrow{\mathbf{P}}G(\lambda)_t,\quad t\in R_+,\quad \lambda\in E^1\Rightarrow X^n\xrightarrow{\mathscr{L}(R_+)}X.\tag{4.84}$$

условие (4.84) совместно с условием ($\sup\beta$) влекут функциональную сходимость $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. Если также

$$\sup_{\substack{s\leqslant t\\ \lambda\leqslant\theta}} |G^n(\lambda)_s - G(\lambda)_s| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad \lambda\in E^1, \quad \theta\in E^1, \tag{4.85}$$

то $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

Выше приведенные результаты конкретизируются (помимо уже рассмотренного случая «дискретного времени» (4.82)) во многих полезных и интересных случаях, среди которых отметим следующее:

I. Центральная предельная теорема (X — непрерывный гауссовский процесс с независимыми приращениями и триплетом $(B, C, 0)$).

II. Центральная предельная теорема, когда X^n — локальные мартингалы, и X — непрерывный гауссовский процесс с независимыми приращениями и триплетом $(0, C, 0)$.
Тогда, если, скажем $|\Delta X^n|\leqslant K$, то

$$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X \Leftrightarrow [X^n, X^n]_t \xrightarrow{\mathbf{P}} C_t, \quad t\in R_+;$$

$$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X \Leftrightarrow \langle X^n \rangle_t \xrightarrow{\mathbf{P}} C_t,$$

$$\nu^n([0, t]\times\{|x|>\varepsilon\}) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad t\in R_+, \quad \varepsilon>0,$$

где $[X^n, X^n]$ и $\langle X^n\rangle$ — квадратические вариации и характеристика X^n.

Этот результат остается в силе, если выполнено условие

$$\lim_{a\uparrow\infty}\overline{\lim_{n}}\,\mathbf{P}(|x|\,I(|x|>a)*\nu_t^n>\eta)=0, \quad \eta>0, \quad t>0, \tag{4.86}$$

для выполнения которого достаточно, например, чтобы «семейство $\{\sup_{s\leqslant t}|\Delta X_s^n|\}$ было равномерно интегрируемо для всех $t>0$».

Эти результаты делают понятным смысл условия относительной устойчивости как сходимости квадратической вариации $[X^n, X^n]_1 \equiv \equiv \sum \xi_{nk}^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} C_1 = 1$.

В этой связи полезно отметить, что все вышеприведенные теоремы о сходимости $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$, $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(s)} X$ в качестве достаточных (а часто, и необходимых) условий содержат условия типа $T^n \xrightarrow{\mathbf{P}} T$, где сходимость «$\xrightarrow{\mathbf{P}}$» понимается как сходимость по вероятности соответствующих компонент триплетов, т. е. как выполнимость для них соответствующих эргодических теорем. Можно сказать поэтому, что наши теоремы носят характер редукции слабой сходимости к выполнимости законов больших чисел для компонент триплетов, что отвечает духу вопроса А. Я. Хинчина о том, какова связь между центральной предельной теоремой и законом больших чисел.

III. Сходимость точечных процессов X^n с компенсаторами A^n, $n \geqslant 1$ к пуассоновскому процессу с непрерывным детерминированным компенсатором A:

$$A_t^n \xrightarrow{\mathbf{P}} A_t, \quad t \in S \Rightarrow X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(S)} X,$$

$$A_t^n \xrightarrow{\mathbf{P}} A_t \quad t \in R_+ \Rightarrow X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

IV. Сходимость нормированных сумм одинаково распределенных локальных мартингалов $Y^k = (Y_t^k)_{t \geqslant 0}$, $k \geqslant 1$. Пусть Y — непрерывный гауссовский локальный мартингал с (непрерывной) функцией $C_t = \mathbf{E} Y_t^2$, $t \geqslant 0$, $C_0 = 0$. Если

$$X^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k \leqslant n} Y^k,$$

то $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, где X — винеровский процесс с характе ристиками $(0, C, 0)$

V. Предельные теоремы для марковских процессов. Пусть. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t\ \theta_t, Y_t, \mathbf{P}_x)$ — марковский процесс с непрерывными справа траекториями и со значениями в некотором топологическом пространстве E. При этом пусть существует вероятностная мера μ и σ-алгебра инвариантных по отношению к полугруппе $(\theta_t)_{t \geqslant 0}$ является $\mathbf{P}_\mu$-тривиальной $\left(\mathbf{P}_\mu = \int \mathbf{P}_x \mu(dx)\right)$, т. е. выполнено условие эргодичности.

Тогда, если $f = f(x)$, $x \in E$, — ограниченная борелевская функция вида

$$f = \mathcal{A} g,$$

где $\mathcal{A}$ — слабый инфинитезимальный оператор, g и g^2 принадлежат области определения $\mathcal{A}$, то процессы

$$X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} f(Y_s)\, ds, \quad t \geqslant 0,$$

относительно меры $\mathbf{P}_\mu$ сходятся $(X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X)$ к процессу $X = \sqrt{\beta} W$, где W — стандартный винеровский процесс и

$$\beta = -2 \int g(x) \mathcal{A} g(x) \mu(dx).$$

VI. Предельные теоремы для стационарных процессов. Пусть $Y = (Y_t)_{t \geqslant 0}$ — эргодический стационарный процесс, $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s, \ s \leqslant t)$,

$$p \in [2, \infty], \quad q \in [1, 2], \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

и

$$\begin{cases} \|Y_0\|_p < \infty, \\ \int\limits_0^\infty \|\mathsf{E}(Y_t \mid \mathscr{F}_0)\|_q \, dt < \infty. \end{cases}$$

Тогда процессы

$$X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_0^{nt} Y_s ds, \quad t \geqslant 0,$$

в смысле сходимости конечномерных распределений ($X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(R_+)} X$), сходятся к процессу $X = \sqrt{c} W$, где W — стандартный винеровский процесс, $c = 2 \int\limits_0^\infty \mathsf{E}(Y_0 Y_t) \, dt$.

Более того, если $p = 2$, то $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

7. Что известно относительно сходимости семимартингалов X^n к *произвольному* процессу с независимыми приращениями X?

Если предположить, что $g(\lambda)_t$ не обращается в ноль, то метод стохастических экспонент снова применим и доказывается следующий результат.

Теорема 4.17. Пусть выполнены условия

$$(\beta) \ B_t^n \xrightarrow{\mathbf{P}} B_t, \quad t \in S,$$

$$(\gamma) \ \widetilde{C}_t^n \xrightarrow{\mathbf{P}} \widetilde{C}_t, \quad t \in S,$$

$$(\delta) \ g * \nu_t^n \xrightarrow{\mathbf{P}} g * \nu_t, \quad t \in S, \quad g \in C_1,$$

$$(S_k - \delta) \ g * \nu^n \xrightarrow{\mathbf{P}} g * \nu,$$

где S — всюду плотное множество в R_+.

Тогда $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(S)} X$.

Относительно функциональной сходимости справедлив такой результат.

Теорема 4.18. Пусть выполнены условия

$$(S_k - \beta) \ B^n \xrightarrow{\mathbf{P}} B \text{ в топологии Скорохода},$$

$$(\gamma) \ \widetilde{C}_t^n \xrightarrow{\mathbf{P}} \widetilde{C}_t, \quad t \in R_+,$$

$$(S_k - \delta) \ g * \nu^n \xrightarrow{\mathbf{P}} g * \nu \text{ в топологии Скорохода, для } g \in C_1.$$

Тогда $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

Применение этих теорем к точечным процессам X^n и X с компенсаторами A^n и детерминированным компенсатором A приводит к следующему утверждению.

Теорема 4.19. а) Если

$$A_t^n \xrightarrow{\mathbf{P}} A_t, \quad t \in R_+,$$

$$\sum_{s \leqslant t} (\Delta A_s^n)^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} \sum_{s \leqslant t} (\Delta A_s)^2, \quad t \in R_+,$$

то $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(R_+)} X$ и $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

b) Если $A^n \xrightarrow{\mathbf{P}} A$ в топологии Скорохода, то $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

§ 6. Относительная компактность и плотность семейств распределений семимартингалов

1. Непременным этапом при установлении результатов типа

$$«T^n \to T» \Rightarrow «X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X»$$

было установление плотности семейства $\{\mathbf{P}^n\}$ вероятностных распределений семимартингалов $\{X^n\}$, выраженное в терминах свойств триплетов $T^n = (B^n, C^n, \nu^n)$, $n \geqslant 1$.

Изложение соответствующих результатов естественно начать со следующего хорошо известного общего результата, лежащего в основе поиска простых критериев плотности семейства $\{\mathbf{P}^n\}$.

Теорема 4.20. Семейство $\{\mathbf{P}^n\}$ распределений вероятностей случайных процессов $X^n = (X_t^n)_{t \geqslant 0}$ со значениями в пространстве $(\mathbf{D}, \mathscr{D})$ является плотным тогда и только тогда, когда

(a) для любого $N \in N^* = \{1, 2, \ldots\}$ и $\varepsilon > 0$ существуют $n_0 = n_0(N, \varepsilon)$ и $K = K(N, \varepsilon)$ такие, что

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow \mathbf{P}\left(\sup_{t \leqslant N} |X_t^n| > K\right) \leqslant \varepsilon;$$

(b) для всех $N \in N^*$, $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ найдутся $n_0 = n_0(N, \varepsilon, \eta)$ и $\theta = \theta(N, \varepsilon, \eta) > 0$ такие, что

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow \mathbf{P}\left(w'_N(X^n, \theta) \geqslant \eta\right) \leqslant \varepsilon,$$

где модуль непрерывности

$$w'_N(\alpha; \theta) = \inf\left\{\max_{i \leqslant r} w(\alpha; [t_{i-1}, t_i)) \colon 0 = t_0 < \ldots < t_r = N, \right.$$

$$\left. \inf_{i < r} (t_i - t_{i-1}) > \theta\right\}$$

и $w(\alpha, I) = \sup_{s, t \in I} |\alpha(s) - \alpha(t)|$, I — интервал в R_+.

(Напомним, что подмножество A в $\mathbf{D}$ является относительно компактным в топологии Скорохода тогда и только тогда, когда

(1) $\sup_{\alpha \in A} \sup_{s \leqslant N} |\alpha(s)| < \infty$ для всех $N \in N^*$;

(2) $\lim_{\theta \downarrow 0} \sup_{\alpha \in A} w'_N(\alpha, \theta) = 0$ для всех $N \in N^*$;

этот критерий и используется для доказательства предшествующей теоремы 4.20).

Разумеется теорема 4.20 слишком уж обща, и (в случае пространства $(\mathbf{D}, \mathscr{D})$) часто пользуются следующим достаточным условием (А. Н. Колмогоров — Н. Н. Ченцов), выводимым из этой теоремы.

Теорема 4.21. Пусть

(a) последовательность $\{X_0^n\}$ плотна (в R);

(b) $\lim\limits_{\delta\downarrow 0}\overline{\lim\limits_{n}}\,\mathbf{P}(|X_\delta^n - X_0^n| > \varepsilon) = 0, \quad \varepsilon > 0;$

(c) существует непрерывная функция F на R_+ и две константы $\gamma \geqslant 0$, $\alpha > 1$ такие, что

$$\forall\lambda > 0, \quad \forall s < r < t, \quad \forall n \in N^*$$

$$\mathbf{P}(|X_r^n - X_s^n| \geqslant \lambda,\ |X_t^n - X_r^n| \geqslant \lambda) \leqslant \lambda^{-\gamma}[F(t) - F(s)]^\alpha. \quad (4.87)$$

Тогда последовательность $\{X^n\}$ плотна.

Этот критерий хорошо применим, например, в случае диффузионных процессов (даже со скачками), когда все коэффициенты (параметры) ограничены равномерно по n. Но этот критерий *не работает* уже в диффузионном случае, когда коэффициенты не ограничены, и связано это с тем, что в этом случае «детерминированный контроль» приращений, как в (4.87), становится недостаточным.

2. По-видимому первым критерием, в котором учтена ограниченность применения теоремы 4.19, вызванная «равномерностью по n» и «детерминированностью контроля» приращений в (4.87), был критерий Альдуса, применяемый для согласованных случайных процессов X^n, заданных на стохастических базисах $\mathscr{B}^n = (\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathbf{F}^n = (\mathscr{F}_t^n)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P}^n)$.

Теорема 4.22. Пусть для всех $N \in N^*$

$$\lim_{\theta\downarrow 0}\overline{\lim_{n}} \sup_{\substack{S,T \in \mathscr{F}_N^n \\ S \leqslant T \leqslant S+\theta}} \mathbf{P}^n(|X_T^n - X_S^n| \geqslant \varepsilon) = 0, \quad (4.88)$$

где $\mathscr{F}_N^n$ — множество всех $\mathbf{F}^n$-моментов остановки и выполнено также условие (a) из теоремы 4.21. Тогда семейство $\{X^n\}$ плотно.

Сделаем ряд замечаний относительно этого критерия прежде чем переходить к его применениям.

1. Разумеется плотность семейства $\{X^n\}$ никак не связана с фильтрациями $\mathbf{F}^n$, $n \geqslant 1$. И ясно, что надо стремиться к тому, чтобы класс $\mathscr{F}_N^n$ был как можно «меньше» (но так, конечно, чтобы $\mathscr{F}_t^n \supseteq \sigma(X_s^n,\ s \leqslant t)$).

2. Критерий Альдуса «работает» тогда, когда процессы X^n, $n \geqslant 1$, «асимптотически квазинепрерывны слева». Некоторое представление об этом можно получить, если просто предположить, что все $X^n \equiv X$. Тогда, очевидно, условие (a) теоремы 4.21

выполнено, а (4.88) выполнено в том и только том случае, когда процесс X — квазинепрерывен слева (т. е. $\mathbf{P}(\Delta X_T \neq 0,\ T < \infty) = 0$ для всякого предсказуемого момента T.

3. Если $\mathbf{F}^n$ — максимально возможная фильтрация, т. е. $\mathscr{F}_t^n = \mathscr{F}^n$ для всех $t \geqslant 0$, то условие (4.88) будет обеспечивать C — плотность семейства $\{X^n\}$.

Из теоремы 4.22 выводятся следующие следствия.

Следствие 1. Если X^n — локально квадратично интегрируемые мартингалы и $G^n = \langle X^n \rangle$, $n \geqslant 1$, то для плотности семейства $\{X^n\}$ достаточно, чтобы

(a) семейство $\{X_0^n\}$ было плотным (в E^1),

(b) семейство $\{\langle X^n \rangle\}$ было C-плотным (в $\mathbf{D}$),

т. е. семейство $\{\langle X^n \rangle\}$ плотно и все слабые пределы есть непрерывные процессы.

Так что, если *a priori* известно, что $\langle X^n \rangle_t \xrightarrow{\mathbf{P}} C_t$, $t \geqslant 0$, где $C = (C_t)_{t \geqslant 0}$ — непрерывный процесс, то семейство $\{X^n - X_0^n\}$ является плотным.

Следствие 2. Пусть X^n — семимартингалы, $n \geqslant 1$, с триплетами $T^n = (B^n = B^n(h),\ C^n,\ \nu^n)$, где $h = h(x)$ — ограниченная функция с компактным носителем и удовлетворяющая свойству $h(x) = x$ в окрестности нуля. Пусть

$$\tilde{C}^n = C^n + h^2 * \nu - \sum_{s \leqslant \cdot} (\Delta B_s^n)^2$$

— модифицированная вторая характеристика X^n. Предположим, что выполнены следующие условия:

(1) последовательность (X_0^n) плотна (в E^1);

(2) для всех $N > 0$, $\varepsilon > 0$

$$\lim_{a \uparrow \infty} \overline{\lim_n}\, \mathbf{P}^n \{\nu^n([0, N] \times \{x : |x| > a\}) > \varepsilon\} = 0;$$

(3) каждая из последовательностей (B^n), $(\tilde{C}^n)$, $(g_p * \nu^n)$ с $g_p(x) = (p|x| - 1)^+ \wedge 1$, $p \in N^*$, является C — плотной.

Тогда последовательность $\{X^n\}$ является плотной.

Эти критерии «хорошо обслуживают» случаи сходимости к квазинепрерывным процессам. В общем же случае приходится прибегать к более сложным критериям. Важно при этом подчеркнуть, что они также выражены в предсказуемых терминах.

§ 7. Сходимость семимартингалов к семимартингалу

1. Перейдем теперь к результатам о слабой сходимости семимартингалов X^n к семимартингалу X. Следует сразу отметить, что здесь идеология «$T^n \to T$»$\Rightarrow$«$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$» через «плотность»$\oplus$«сходимость конечномерных распределений» не работает по той причине, что трудно устанавливать слабую сходимость $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(\mathbf{R}_+)} X$, когда процесс X не является процессом с независимыми приращениями, а есть семимартингал сколь-нибудь общей структуры (даже, скажем, процесс диффузионного типа).

Однако, приведенная выше схема доказательства «$T^n \to T$»$\Rightarrow$ $\Rightarrow$«$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$» с использованием трех промежуточных этапов

I. Установление плотности семейства $\{X^n\}$,

II. Характеризация всех слабых пределов $\mathbf{P}'\ (= w\text{-}\lim \mathbf{P}^{n'})$,

III. Идентификация предельных точек $\mathbf{P}'$ с $\mathbf{P}$ в общей ситуации также работает, но требует привлечения новых «мартингальных» идей. Поясним, это на том примере, когда X^n $(=M^n)$ являются мартингалами (более общо, локальными мартингалами).

Итак, пусть M^n, $n\geqslant 1$, являются мартингалами, причем $|M^n|\leqslant b$ для всех n и распределения $\mathscr{L}(M^n)$ сходятся (слабо) к распределению $\mathscr{L}(M)$ некоторого процесса M. Нетрудно показать, что тогда процесс M является (по отношению к естественной фильтрации и закону $\mathscr{L}(M)$) мартингалом. Аналогичный результат остается справедливым, когда M^n, $n\geqslant 1$, являются локальными мартингалами с равномерно ограниченными скачками, $|\Delta M^n|\leqslant b$, $n\geqslant 1$: если $\mathscr{L}(M^n)\xrightarrow{w}\mathscr{L}(M)$, то M — локальный мартингал.

Иначе говоря, класс локальных мартингалов (с равномерно ограниченными скачками) является устойчивым в смысле слабой сходимости.

Перейдем теперь к вопросу о *характеризации* процессов, являющихся слабыми пределами семимартингалов X^n с триплетами $T^n=(B^n, C^n, \nu^n)$, $n\geqslant 1$.

С этой целью введем ряд обозначений и условий.

Прежде всего будем предполагать, что «предельный» процесс X есть канонический: $X_t(\alpha)=\alpha(t)$, где $\alpha=\alpha(t)$, $t\geqslant 0$, — функции из пространства $\mathbf{D}$. Пусть также заданы объекты $T= =(B, C, \nu)$, играющие в дальнейшем роль триплета «предельного» процесса X и определяемые следующим образом:

$B=(B_t(\alpha))_{t\geqslant 0}$ — предсказуемый процесс локально ограниченной вариации, $B_0=0$;

$C=(C_t(\alpha))_{t\geqslant 0}$ — непрерывный неубывающий согласованный процесс с $C_0=0$;

$\nu=\nu(\alpha; dt, dx)$ — предсказуемая случайная мера на $R_+\times E^1$ такая, что

$$\nu(R_+\times\{0\})=\nu(\{0\}\times E^1)=0,\quad (1\wedge|x|^2)*\nu_t<\infty,$$

$$\int_{E^1}\nu(\{t\}\times dx)\,h(x)=\Delta B_t,\quad \nu(\{t\}\times E^1)\leqslant 1,\quad t\geqslant 0.$$

Положим также

$$\widetilde{C}=C+h^2*\nu-\sum_{s\leqslant\cdot}(\Delta B_s)^2 \tag{4.89}$$

и введем следующие (на первый взгляд, возможно, несколько странные) условия

$$(\beta\text{-}S)\quad B_t^n - B_t \circ X^n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad t \in S,$$

$$(\gamma\text{-}S)\quad \widetilde{C}_t^n - \widetilde{C}_t \circ X^n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad t \in S,$$

$$(\delta\text{-}S)\quad g*\nu^n - (g*\nu_t) \circ X^n \xrightarrow{n} 0, \quad t \in S,$$

сводящиеся к уже рассмотренным ранее условиям, когда B, C, ν являются просто детерминированными функциями.

Нам понадобятся также следующие условия (мажорируемости и непрерывности):

$$\sup_\alpha |\widetilde{C}_t(\alpha)| < \infty, \quad \sup_\alpha |g*\nu_t(\alpha)| \text{ для всех } t \geqslant 0,\ g \in G_1 \quad (4.90)$$

и для всех $t \geqslant 0$ и $g \in G_1$ функции $\alpha \to B_t(\alpha)$, $\widetilde{C}_t(\alpha)$, $g*\nu_t(\alpha)$ являются **P**-п. н. непрерывными в топологии Скорохода, где **P** — слабый предел законов $\alpha(X^n)$. (4.91)

Теперь можно сформулировать основной результат, «обслуживающий» этап II характеризации слабых пределов $\mathscr{L}(X^n)$.

Теорема 4.23. Пусть $\mathscr{L}(X^n)$ слабо сходятся к некоторому вероятностному распределению **P**. Пусть выполнены условия (β-S), (γ-S), (δ-S) для некоторого всюду плотного подмножества в R_+, содержащегося в $R_+ \setminus \{t>0\colon \mathbf{P}(\Delta X_t \neq 0) > 0\}$ и пусть также выполнены условия мажорируемости (4.90) и непрерывности (4.91).

Тогда X является семимартингалом на ($\mathbf{D}$, $\mathscr{D}$, **P**) с триплетом предсказуемых характеристик $T = (B, C, \nu)$.

Идея доказательства этой теоремы основывается на том факте, что согласно теореме 4.11 проверка «семимартингальности» равносильна проверке того, что три процесса (см. п. 6) в теореме 4.11) являются локальными мартингалами. Поэтому процессы $M^n(h) \equiv X^n(h) - X_0{}^n - B^n$, $(M^n(h))^2 - C^n$, $g*\mu^n - g*\nu^n$ являются (относительно мер $\mathscr{L}(X^n)$) локальными мартингалами, и доказательство теоремы сводится к проверке того, что условия теоремы гарантируют, что соответствующие процессы $M(h) \equiv X(h) - X_0 - B$, $(M(h))^2 - C$, $g*\mu - g*\nu$ на стохастическом базисе ($\mathbf{D}$, $\mathscr{D}$, $(\mathscr{D}_t)$, **P**) также являются локальными мартингалами.

Существуют и другие результаты «характеризационного» типа. Например, пусть

$$(X^n, B^n, \widetilde{C}^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X, B, C) \qquad (4.92)$$

и

$$(X^n, g*\nu^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X, g*\nu), \quad g \in C_1. \qquad (4.93)$$

Тогда процесс X является семимартингалом с триплетом (B, C, ν) (См. теорему 2.4, гл. IX, [40]).

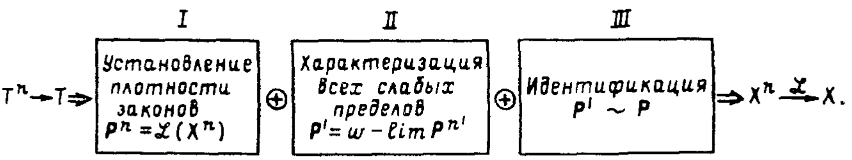
Или, пусть, например, X — канонический процесс, $S_{k_3}[\cdot]$, $S_{k_2}[\cdot]$ — расстояния, совместимые с топологией Скорохода в $\mathbf{D}(E^3)$, $\mathbf{D}(E^2)$. Тогда, если $\mathscr{L}(X^n)\xrightarrow{w}\mathbf{P}$,

$$S_{k_3}[(X^n, B^n, \widetilde{C}^n), (X, B, \widetilde{C})\circ X^n]\xrightarrow{\mathbf{P}}0,$$

$$S_{k_2}[(X^n, g*\nu^n), (X, g*\nu)\circ X^n\xrightarrow{\mathbf{P}}0, \quad g\in C_1,$$

и функции $\alpha\to(\alpha, B(\alpha), C(\alpha))$ и $\alpha\to(\alpha, g*\nu(\alpha))$, $g\in C_1$ являются $\mathbf{P}$-п. н. непрерывными, то X на стохастическом базисе $(\mathbf{D}, \mathscr{D}, (\mathscr{D}_t), \mathbf{P})$ будет семимартингалом с триплетом $T=(B, C, \nu)$. (См. теорему 2.22, гл. IX в [40]).

имся теперь к нашей основной задаче получени результатов для семимартингалов типа «$T^n\to T$»$\Rightarrow X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$». Мы будем снова следовать схеме



Приведенные выше результаты «обслуживают» пока только этап II («характеризация»). Рассмотрим теперь результаты относительно характера сходимости «$T^n\to T$», которая обеспечивает одновременно и этап I («плотность») и этап II «характеризация»). Что же касается этапа III, то мы будем просто предполагать, что триплет $T=(B, C, \nu)$ таков, что он единственным образом определяет меру $\mathbf{P}$ такую, что канонический процесс X, относительно этой меры $\mathbf{P}$ имеет своим триплетом именно набор $T=(B, C, \nu)$. (К этому вопросу существования и единственности «семимартингальной» проблемы мы вернемся в § 8).

Приведем (хотя и длинные) точные формулировки теорем о сходимости, предполагая, что $X_0^n\equiv0$, $X_0\equiv0$.

Начнем со случая, когда «предельный» процесс X является квазинепрерывным слева, т. е. $\nu(\{t\}\times E^1)=0$, $t\geqslant0$.

Теорема 4.24. Пусть S — некоторое всюду плотное множество в R_+ и выполнены следующие условия на $T=(B, C, \nu)$:

(1) строгая мажорируемость в том смысле, что существует непрерывная и детерминированная возрастающая функция $t\to F_t$, которая строго мажорирует*) функции $\mathrm{Var}(B(\alpha))$ и $C(\alpha)+(|x|^2\wedge1)*\nu(\alpha)$ для всех $\alpha\in\mathbf{D}$;

---

*) Мы говорим, что функция $t\to F_t$ строго мажорирует функцию $t\to G_t$ (пишем: $G\prec F$), если функция $t\to F_t-G_t$ является неубывающей.

(2) условие на «большие» скачки:

$$\lim_{a\uparrow\infty}\sup_{\alpha\in\mathbf{D}} \nu(\alpha;\ [0,\ t]\times\{x:|x|>a\})=0;$$

(3) условие непрерывности: для всех $t\in S$, $g\in C_1$ функции $\alpha\to B_t(\alpha)$, $\tilde{C}_t(\alpha)$, $g*\nu_t(\alpha)$ непрерывны в топологии Скорохода.

Пусть также выполнены следующие условия на сходимость «$T^n\to T$»:

$$(\sup\text{-}\beta)\quad \sup_{s\leqslant t}|B_t^n-B_t\circ X^n|\xrightarrow{\mathbf{P}}0,\quad t>0,$$

$$(\gamma\text{-}S)\quad \tilde{C}_t^n-\tilde{C}_t\circ X^n\xrightarrow{\mathbf{P}}0,\quad t\in S,$$

$$(\delta\text{-}S)\quad g*\nu_t^n-(g*\nu_t)\circ X^n\to 0,\quad t\in S,$$

где S — некоторые всюду плотное множество в R_+.

Тогда $\mathscr{L}(X^n)\xrightarrow{w}\mathbf{P}$, т. е. $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$.

Замечание. В случае, когда предельный процесс X является процессом с независимыми приращениями без фиксированных моментов скачков, из этой теоремы вытекает теорема 4.7.

Отказ от предположения «квазинепрерывности слева» предельного процесса X приводит к следующему общему результату.

Теорема 4.25. Пусть выполнены следующие условия:

(1) строгая мажорируемость в том смысле, что существуют детерминированные возрастающие функции $t\to F_t$, $t\to F_t^g$ такие, что для всех $\alpha\in\mathbf{D}$, $g\in C_1$

$$\mathrm{Var}(B(\alpha))\prec F,\ \tilde{C}(\alpha)\prec F,\ g*\nu(\alpha)\prec F^g;$$

(2) условие на «большие скачки»

$$\lim_{a\uparrow\infty}\sup_{\alpha} \nu(\alpha;\ [0,\ t]\times\{x:|x|>a\})=0;$$

(3) условие непрерывности: если S — всюду плотное множество в R_+, содержащееся во множестве тех моментов времени t, для которых $\Delta F_t=0$ и $\Delta F_t{}^g=0$ для всех $g\in C_1$ (F и F^g определены в (1)), то функции $\alpha\to B_t(\alpha)$, $\tilde{C}_t(\alpha)$, $g*\nu_t(\alpha)$ непрерывны в топологии Скорохода для всех $t\in S$, $g\in C_1$.

Пусть также выполнены следующие условия на сходимость «$T^n\to T$»:

$$(S_k-\beta)\,S_k(B^n,\ B\circ X^n)\xrightarrow{\mathbf{P}}0,$$

$$(S_k-\gamma)\,S_k(\tilde{C}^n,\ \tilde{C}\circ X^n)\xrightarrow{\mathbf{P}}0,$$

$$(S_k-\delta)\,S_k(g*\nu^n,\ (g*\nu)\circ X^n)\xrightarrow{\mathbf{P}}0,\ g\in C_1,$$

где S_k — метрика, совместимая с топологией Скорохода.

Тогда (снова в предположении, что триплет T однозначно определяет меру $\mathbf{P}$) $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$, т. е. $\mathscr{L}(X^n) \xrightarrow{w} \mathbf{P}$.

Замечание. Если предельный процесс X является процессом с независимыми приращениями, то из приведенной теоремы получаем результат теоремы 4.9.

2. Приведем ряд примеров, иллюстрирующих предельные теоремы о слабой сходимости распределений вероятностей семимартингалов.

Пример 1. Сходимость диффузионных процессов со скачками.

Мы предполагаем, что процессы X и X^n, $n \geqslant 1$, имеют следующую структуру.

Процесс X, заданный на каноническом пространстве, является однородным диффузионным процессом со скачками, т. е.

$$B_t = \int_0^t b(X_s)\,ds,\ C_t = \int_0^t c(X_s)\,ds,\ c(x) \geqslant 0,$$

$$\nu(dt,\ dx) = dt K(X_t,\ dx),\ \int_{E^1} K(x,\ dy)(|y|^2 \wedge 1) < \infty.$$

Обозначим также

$$\tilde{C}_t = \int_0^t \tilde{c}(X_s)\,ds,\ \tilde{c}(x) = c(x) + \int_{E^1} h^2(y) K(x,\ dy)$$

и будем предполагать, что соответствующая проблема мартингалов имеет единственное решение $\mathbf{P}_x$ (для каждого начального состояния $X_0 = x$).

В этом предположении процесс X является марковским. При этом, если $f = f(x) \in C^2$ и

$$\mathscr{A} f(x) = b(x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} c(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} +$$

$$+ \int K(x,\ dy) \left[f(x+y) - f(y) - h(y) \frac{\partial f(y)}{\partial y} \right],$$

то

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathscr{A} f(X_s)\,ds$$

— локальный мартингал (относительно любой из мер $\mathbf{P}_x$, $x \in E^1$) и значит, $\mathscr{A}$ — расширенный инфинитезимальный оператор процесса X.

Что же касается процессов X^n, $n\geqslant 1$, то мы будем предполагать, что они имеют ту же структуру, что и процесс X с

$$B_t^n=\int_0^t b^n(X_s^n)\,ds,\quad C_t^n=\int_0^t c^n(X_s^n)\,ds,$$

$$\nu^n(dt,\,dx)=dt K^n(X_t^n,\,dx),\quad \tilde{C}_t^n=\int_0^t \tilde{c}^n(X_s^n)\,ds.$$

Однако, мы не предполагаем единственности решения соответствующей мартингальной проблемы, так что X^n, вообще говоря, не марковский процесс.

Предположим, что набор (b, c, K) таков, что

$$\lim_{b\uparrow\infty}\sup_{|x|\leqslant a} K(x,\ \{y:|y|>b\})=0,\quad a>0, \tag{4.94}$$

функции $x\to b(x)$, $\tilde{c}(x)$, $\int K(x,\ dy)\,g(y)$ являются непрерывными для $g\in C_1$ (4.95)

Пусть также

$$b^n\to b,\ \tilde{c}^n\to c,\ \int_{E^1} K^n(\cdot,\ dy)\,g(y)\to\int_{E^1} K(\cdot,\ dy)\,g(y) \tag{4.96}$$

локально равномерно, $g\in C_1$,

$$\eta^n\xrightarrow{d}\eta,\ \text{где}\ \eta^n=\mathscr{L}(X_0^n),\ \eta=\mathscr{L}(X_0). \tag{4.97}$$

Теорема 4.26. Если выполнены условия (4.94)—(4.97), то

$$\mathscr{L}(X^n)\xrightarrow{w}\mathbf{P}=\int_{E^1}\mathbf{P}_x\eta(dx).$$

Замечание. Предположим, что X^n — марковский процесс, $n\geqslant 1$, с расширенным инфинитезимальным оператором $\mathscr{A}^n$. Тогда условия (4.96) равносильны тому, что

$$\mathscr{A}^n f\to\mathscr{A}f\ \text{локально равномерно для всех}\ f\in C^2. \tag{4.98}$$

Тем самым в марковском случае из теоремы 26 получаем известную теорему Троттера—Като: если выполнены условия (4.95), (4.96), (4.98), то $\mathscr{L}(X^n)\xrightarrow{w}\mathbf{P}$.

Пример 2. Сходимость чисто скачкообразных марковских процессов к диффузионному. Пусть X^n чисто скачкообразный марковский процесс с

$$\mathscr{A}^n f(x)=\int_{E^1} K^n(x,\ dy)\,[f(x+y)-f(x)], \tag{4.99}$$

где K^n — конечная переходная мера на E^1.

Тогда

$$b^n(x)=\int_{E^1} K^n(x,\ dy)\,h(y),\ c^n(x)=0,\ \tilde{c}^n=\int_{E^1} h^2(y)\,K^n(x,\ dy).$$

Для простоты будем предполагать, что $\int |y|^2 K^n(x, dy) < \infty$. В этом предположении можно брать $h(y) = y^2$. Пусть также X — диффузионный процесс (с $K=0$) и пусть

$$b^n \to b, \quad \tilde{c}^n \to c \text{ локально равномерно,} \tag{4.100}$$

$$\sup_{x:|x|\leqslant a} \int_{E^1} K^n(x, dy)|y|^2 I(|y|>\varepsilon) \to 0, n\uparrow\infty, \varepsilon>0. \tag{4.101}$$

$$\eta^n \xrightarrow{d} \eta \tag{4.102}$$

Теорема 27. В предположениях (4.99)—(4.102) распределения $\mathscr{L}(X^n)$ слабо сходятся к $\mathbf{P} = \int \eta(dx)\mathbf{P}_x$ — распределению диффузионного процесса с коэффициентами b, c и начальным распределением η.

Пример 3. В предыдущем примере пусть $\eta^n = \eta = \varepsilon_x$ для некоторого $x \in R$ (ε_x — распределение, сосредоточенное в точке x), выполнены условие (4.101) и условия

$$b^n \to b, \quad c^n \to 0 \text{ локально равномерно,} \tag{4.103}$$

$$b = b(x) \text{ — удовлетворяет условию Липшица} \tag{4.104}$$

В этих предположениях предельный процесс X является вырожденным, т. е. мера $\mathbf{P}_x$ «сидит» на решении уравнения

$$dx_t(x) = b(x_t(x))\,dt, \qquad x_0(x) = x,$$

и значит

$$\sup_{s\leqslant t} |X_s^n - x_s(x)| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \ t \geqslant 0 \tag{4.105}$$

поскольку сходимость Скорохода к непрерывной функции совпадает с локально равномерной сходимостью. Оказывается, что из предшествующих результатов легко получить уточнение скорости сходимости в (4.105).

Теорема 4.28. Пусть $(a_n)_{n\geqslant 1}$ последовательность положительных чисел таких, что $a_n \uparrow \infty$ и

$$a_n^2 \tilde{c}^n \to \hat{c} \text{ локально равномерно,} \tag{4.106}$$

$\hat{c} = \hat{c}(x)$ — непрерывная функция;

$$\lim_n \sup_{|x|\leqslant a} a_n^2 \int_{E^1} K^n(x, dy)|y|^2 I\left\{|y| > \frac{\varepsilon}{u_n}\right\} = 0, \quad a>0, \quad \varepsilon>0. \tag{4.107}$$

Тогда процесс

$$Y_t^n = a_n \left(X_t^n - X_0^n - \int_0^t b^n(X_s^n) \right) ds$$

сходится по распределению к непрерывному гауссовскому процессу с независимыми приращениями и триплетом $T = (0, \hat{C}(x), 0)$, где $\hat{C}(x)_t = \int_0^t \hat{c}_s(x_s(x))\,ds$.

Таким образом символически можно записать, что

$$X_t^n = X_0^n + \int_0^t b^n(x_s(x))\,ds + \frac{1}{a_n} Y_t. \qquad (4.108)$$

§ 8. О проблеме мартингалов

1. Остановимся кратко на результатах, относящихся к «проблеме мартингалов», имеющей прямое отношение к этапу III («идентификация»), в котором все слабые пределы $\mathbf{P}' = w\text{-}\lim \mathbf{P}^{n'}$ отождествляются с распределениеме вероятностей $\mathbf{P}$ семимартингала X с триплетом $T=(B, C, \nu)$. Выше была сформулирована теорема 4.23, в которой предельный процесс оказывался семимартингалом, с заданным триплетом (B, C, ν). Так что нужно заняться вопросом о том, когда триплет семимартингала однозначно определяет его распределение. Без каких-либо дополнительных предположений, конечно, триплет не определяет распределение однозначно. Достаточно, например, рассмотреть уравнение $dx_t = b(x_t)\,dt$, у которого существует решение, но не единственное. Так что в этом случае триплет

$$T=(B, 0, 0), \quad B_t = \int_0^t b(x_s)\,ds.$$

не определяет «распределение» вырожденного семимартингала однозначно.

Сформулируем «семимартингальную» проблему в ее полной общности.

Ингредиентами этой проблемы являются:

(1) измеримое пространство $(\Omega, \mathscr{F})$ с потоком σ-алгебр $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, где $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}$, $s \leqslant t$;

2) $X = (X_t(\omega))_{t\geqslant 0}$-согласованный процесс со значениями в пространстве $\mathbf{D}$ («кандидат» быть семимартингалом);

(3) триплет $T=(B, C, \nu)$ («кандидат» быть триплетом семимартингала X), где B — $\mathbf{F}$-предсказуемый процесс локально ограниченной вариации, $B_0=0$; C — $\mathbf{F}$-предсказуемый непрерывный неубывающий процесс, $C_0=0$; ν — $\mathbf{F}$-предсказуемая случайная мера на $R_+ \times E^1$, такая что $\nu(R_+ \times \{0\}) = \nu(\{0\} \times E^1) = 0$, $(x^2 \wedge 1) * \nu_t < \infty$, $\int \nu(\omega; \{t\} \times dx) h(x) = \Delta B_t(\omega)$, $\nu(\omega; \{t\} \times E^1) \leqslant 1$; $h = h(x)$ — функция урезания.

Определение. Решением семимартингальной проблемы, связанной с $(\mathscr{F}_0, X)$ и $(\mathbf{P}_0; B, C, \nu)$ называется вероятностная мера $\mathbf{P}$ на $(\Omega, \mathscr{F})$ такая, что

(a) $\mathbf{P} | \mathscr{F}_0 = \mathbf{P}_0$

(в) X — есть семимартингал на стохастическом базисе $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ с характеристиками $T=(B, C, \nu)$ (относительно заданной функции урезания $h=h(x)$).

Множество всех решений (т. е. мер $\mathbf{P}$) обозначим $S(\mathscr{F}_0, X|\mathbf{P}_0; B, C, \nu)$.

Если положить

$$X(h)=X-\sum_{s\leq\cdot}[\Delta X_s-h(\Delta X_s)],$$

$$M(h)=X(h)-X_0-B,$$

$$\tilde{C}=C+h^2*\nu-\sum_{s\leq\cdot}(\Delta B_s)^2,$$

то как отмечалось в теореме 4.11 вероятностная мера $\mathbf{P}\in S(\mathscr{F}_0, X|\mathbf{P}_0; B, C, \nu)$ в том и только том случае, когда $\mathbf{P}|\mathscr{F}_0=\mathbf{P}_0$ и каждый из процессов

$$M(h), \quad M^2(h)-\tilde{C}, \quad g*\mu^x-g*\nu$$

является локальным мартингалом $g\in\mathscr{G}^+(R_+)$.

Из этой эквивалентной формулировки «семимартингальной» проблемы легко выводится, что множество $S(\mathscr{F}_0, X|\mathbf{P}_0; B, C, \nu)$ является выпуклым множеством.

Приведем ряд результатов относительно существования и единственной семимартингальных проблем.

1) Процессы с независимыми приращениями. Если (B, C, ν) — детерминированное и η-вероятностная мера на R, то в каноническом представлении соответствующая семимартингальная проблема $S(\sigma(X_0), X|\eta; B, C, \nu)$ *имеет* и притом *единственное* решение.

2) Диффузия со скачками — это семимартингал X на стохастическом базисе $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$, для которого

$$B_t(\omega)=\int_0^t b(s, X_s(\omega))\,ds,$$

$$C_t(\omega)=\int_0^t C(s, X_s(\omega))\,ds,$$

$$\nu(\omega; dt\times dx)=dt\times K_t(X_t(\omega); dx),$$

где $b=b(s, x)$ — борелевская функция, $c(s, x)$ — неотрицательная борелевская функция и $K_s(x, dy)$ — борелевское переходное ядро с $K_s(x, \{0\})=0$.

Если $\nu=0$, то X называется диффузией; если b, c, K не зависят от s, то X называется однородной диффузией со скачками.

Построение диффузии со скачками может быть осуществлено, если обратиться к рассмотрению решений стохастических дифференциальных уравнений.

Пусть на стохастическом базисе $\mathscr{B}'=(\Omega', \mathscr{F}', \mathbf{F}', \mathbf{P}')$ заданы: $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ — стандартный винеровский процесс,

$\pi=(\pi(dt, dx))_{t\in R_+, x\in E^1}$ — пуассоновская случайная мера на $R_+\times E^1$ с интенсивностью $q(dt, dx)=dt\otimes F(dx)$, где F — положительная σ-конечная мера на $(E^1, \mathscr{B}(E^1))$. Пусть также заданы (борелевские) коэффициенты:

$$\beta=\beta(t, x),\ \gamma=\gamma(t, x),\ \delta=\delta(t, x, z),\ t\in R_+,\ x\in F,\ z\in E^1,$$

и начальная случайная $\mathscr{F}_0'$ — измеримая величина ξ_0.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY_t=\beta(t, Y_t)\,dt+\gamma(t, Y_t)\,dW_t+h\circ\delta(t, Y_{t-}, z)\,\pi(dt, dz)-$$
$$-q(dt, dz)+h'\circ\delta(t, Y_{t-}, z)\,\pi(dt, dz), \qquad (4.109)$$

где $h=h(x)$ — некоторая функция урезания и $h'(x)=x-h(x)$ и $Y_0=\xi$. (Заметим, что если мера π имеет скачок в точке (t, z), то $\Delta Y_t=\delta(t, Y_{t-}, z)$).

Для уравнений (4.109) можно рассматривать два типа решений: сильные решения (или решения — процессы) и слабые решения (или решения — меры).

Оказывается, что множество всех слабых решений уравнения (4.109) с $\alpha(\xi_0)=\eta$ совпадает с множеством $S(\sigma(Y_0), Y|\eta; B, C, \nu)$, где

$$B=\beta,\quad C=\gamma^2,\quad K_t(y, A)=\int_{E^1} I_{A\setminus\{0\}}(\delta(t, y, z))\,F(dz) \qquad (4.110)$$

(Этот результат допускает и определенное обращение, т. е. по C и K можно построить γ и δ, удовлетворяющие (4.110.)

3. Точечные процессы. Точечный процесс $N=(N_t)_{t\geqslant 0}$, заданный на стохастическом базисе $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0})$, есть согласованный процесс вида

$$N_t=\sum I(\tau_n\leqslant t), \qquad (4.111)$$

где $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ — марковские моменты и $\tau_0\equiv 0$, $\tau_n<\tau_{n+1}$, если $\tau_n<\infty$.

Пусть $N_t=A_t+m_t$ — разложение Дуба—Мейера, где $A=(A_t)_{t\geqslant 0}$ — предсказуемый возрастающий процесс (или — компенсатор процесса N). Если $h=h(x)$ функция урезания, то

$$B(h)=h(1)A,\ C=0,\ \nu(dt, dx)=dA_t\otimes\varepsilon_1(dx).$$

Оказывается, что случай точечных процессов замечателен тем, что соответствующая семимартингальная проблема имеет и притом единственное решение, если в качестве пространства Ω брать множество всех считающих функций, быть может и «взрывающихся», т. е. с $\lim\tau_n\leqslant\infty$.

II. ПРИМЕНЕНИЯ: ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ И ДИФФУЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

§ 1. Принцип инвариантности для стационарных и марковских процессов

1. Стационарные процессы. Пусть $\xi=(\xi_k)_{-\infty<k<\infty}$ — стационарная в узком смысле последовательность или $\xi=(\xi_t)_{t\in E}$ — измеримый стационарный в узком смысле процесс (в случае непрерывного времени).

Принцип инвариантности для ξ означает, что последовательность случайных процессов $X^n=(X_t^n)_{t\geqslant 0}$, $n\geqslant 1$

$$X_t^n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{nt}\xi_k \tag{4.112}$$

или в случае непрерывного времени

$$X_t^n=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{nt}\xi_s ds \tag{4.113}$$

слабо сходится в топологии Скорохода (см. I. § 2) к однородному гауссовскому процессу с независимыми приращениями, в частности, к винеровскому процессу $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$.

Будем считать, что ξ задан на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathrm{F}, \mathbf{P})$ с выделенной на нем фильтрацией

$$\mathrm{F}^\xi=(\mathscr{F}_t^\xi)_{t\in R}:$$

в случае дискретного времени

$$\mathscr{F}_t^\xi=\sigma\{\xi_k,\ -\infty<k\leqslant t)\vee\mathscr{N},$$

в случае непрерывного времени

$$\mathscr{F}_t^\xi=\bigcap_{\varepsilon>0}\sigma\{\xi_s,\ -\infty<s\leqslant t+\varepsilon\}\vee\mathscr{N},$$

где $\mathscr{N}$ — система множеств из $\mathscr{F}$ нулевой меры $\mathbf{P}$.

Обозначим J^ξ σ-алгебру инвариантных множеств, отвечающих ξ (напомним, что J^ξ — совокупность множеств $A\in\mathscr{F}$ таких, что существует измеримое множество B в пространстве траекторий ξ и для всех t

$$A=\{\omega:(\xi_l(\omega))_{l\geqslant t}\in B\}$$

или в случае непрерывного времени

$$A=\{\omega:(\xi_s(\omega))_{s\geqslant t}\in B\}$$

Будем также считать, что σ-алгебра J^ξ пополнена множествами из $\mathscr{F}$ нулевой меры $\mathbf{P}$, и заметим, что для любого t

$$J^\xi\subseteq\mathscr{F}_t^\xi.$$

Если σ-алгебра J^ξ содержит только множества меры 0 или 1, то ξ называется эргодическим процессом.

В неэргодическом случае можно дать следующие обобщения принципа инвариантности: последовательность X^n, $n\geqslant 1$ слабо сходится в топологии Скорохода к смеси винеровских процессов:

$$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \eta W,$$

где W — винеровский процесс, не зависящий от η—J^ξ-измеримой случайной величины. При этом для любой ограниченной и непрерывной в топологии Скорохода функции $f=f(X)$ имеет место сходимость по вероятности

$$\mathrm{E}\{f(X^n)\mid J^\xi\} \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}\{f(\eta W)\mid J^\xi\}.$$

Этот вид сходимости будем в дальнейшем обозначать

$$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \eta W \ (J^\xi\text{-устойчиво}).$$

Современный подход к доказательству принципа инвариантности для стационарных последовательностей и процессов опирается на функциональную центральную предельную теорему для квадратично интегрируемых мартингалов, являющуюся функциональным аналогом теоремы Линдеберга (см. теорему 4.1) с условием Хинчина (4.33).

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}^n=(\mathscr{F}^n_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$, $n\geqslant 1$ и $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$ — стохастические базисы и G — некоторая под — σ-алгебра $\mathscr{F}_0$. На $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ задан винеровский процесс $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$. При каждом $n\geqslant 1$ на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}^n, \mathbf{P})$ задан квадратично-интегрируемый мартингал $M^n=(M_t{}^n)_{t\geqslant 0}$ ($[M^n, M^n]=([M^n, M^n]_t)_{t\geqslant 0}$ — квадратичная вариация M^n, $\Delta M^n=(\Delta M_t{}^n)_{t\geqslant 0}$ — процесс скачков M^n).

Теорема 4.29. Пусть выполнены условия:

$$(O)\quad G\subseteq \bigcap_{n\geqslant 1} \mathscr{F}^n_0;$$

$$(L)\quad \mathrm{E}\sum_{s<t}(\Delta M^n_s)^2\, I(|\Delta M^n_s|>\varepsilon)\to 0,\ n\to\infty,\ \forall t>0,\ \varepsilon>0,$$

(условие Линдеберга);

$$(C)\quad [M^n, M^n]_t \xrightarrow{\mathrm{P}} \eta^2 t,$$

где η^2 — G-измеримая случайная величина (условие Хинчина). Тогда

$$M^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \eta W \ (G\text{-устойчиво}),$$

где $\eta=\sqrt{\eta^2}$ и не зависит от W.

2. Принцип инвариантности Донскера [30] является одним из первых результатов в этой области. В этом случае в (4.113)

ξ — последовательность независимых случайных величин с

$$\mathbf{E}\xi_0^2=\sigma^2, \quad \mathbf{E}\xi_0=0.$$

Условия теоремы 4.29 проверяются очевидным образом.

Процесс X^n является квадратично интегрируемым мартингалом относительно фильтрации $\mathbf{F}^n=(\mathscr{F}^{\xi}_{nt})_{t\geqslant 0}$. В качестве G берется σ-алгебра J^{ξ}, содержащая в данном случае лишь множества меры 0 или 1 и, значит, выполнено условие (0). Условия Линдеберга и Хинчина

$$(L) \quad \lim_n \mathbf{E}\,\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant nt}\xi_k^2 I(|\xi_k|>\sqrt{n}\,\varepsilon)=0,$$

$$(C) \quad [X^n, X^n]_t=\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant nt}\xi_k^2\xrightarrow{\mathbf{P}}t\,\mathbf{E}\xi_0^2=t\sigma^2, \ t>0,$$

выполнены (условие (C) в силу эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина). Следовательно

$$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}\sigma W, \tag{4.114}$$

где $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$.

3. Обобщение принципа инвариантности Донскера. Откажемся от предположения независимости случайных величин в последовательности ξ. Рассмотрим три случая.

(i) ξ — стационарная в узком смысле эргодическая (!) последовательность

$$\mathbf{E}\xi_0^2=\sigma^2,$$

являющаяся мартингал-разностью: $\mathbf{E}(\xi_k\,|\,\mathscr{F}^{\xi}_{k-1})=0$, $-\infty<k<$ $<\infty$.

В этом случае то же самое доказательство, что и в принципе инвариантности Донскера дает (4.114).

(ii) Пусть выполнено условие из (i) без предположения эргодичности. В этом случае

$$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}\eta W \ (J^{\xi}\text{-устойчиво}),$$

где $\eta=\sqrt{\mathbf{E}(\xi_0^2\,|\,J^{\xi})}$ и не зависит от W. Здесь следует лишь заметить, что выполнено условие (O) теоремы 4.29 с $G=J^{\xi}$, поскольку $J^{\xi}\subseteq\mathscr{F}^{\xi}_0$.

(iii) Остановимся на аналоге (ii) для непрерывного времени. В этом случае будем предполагать, что

$$X_t^n=\frac{1}{\sqrt{n}}\,M_{nt}, \tag{4.115}$$

где $M=(M_t)_{t\geqslant 0}$ — квадратично интегрируемый мартингал, являющийся процессом со стационарными в узком смысле приращениями. Чтобы упростить ситуацию, будем считать заданными вероятностное пространство (Ω, $\mathscr{F}$, $\mathbf{P}$) и группу сохраняющих меру преобразований $\theta=(\theta_t)_{t\in E^1}$ с групповой операцией $\theta_t\theta_s=\theta_{t+s}(\theta_0\omega=\omega)$, причем отображение $t, \omega\to\theta_t\omega$ является $\mathscr{B}(E^1)\otimes\mathscr{F}/\mathscr{F}$-измеримым. Пусть $\mathscr{F}^{\mathbf{P}}$-пополнение $\mathscr{F}$ по мере $\mathbf{P}$ и $\mathscr{N}$ — совокупность множеств из $\mathscr{F}^{\mathbf{P}}$ нулевой меры $\mathbf{P}$. Определим фильтрацию $\mathrm{F}^{\mathbf{P}}=(\mathscr{F}_t^{\mathbf{P}})_{t\in R}$, полагая

$$\mathscr{F}_t^{\mathbf{P}}=\mathscr{F}_t^0\vee\mathscr{N},$$

где $\mathscr{F}_t^0=\theta_t^{-1}(G)$, G — некоторая под-σ-алгебра $\mathscr{F}$ такая, что $\theta_t^{-1}(G)\subset G$ при $t<0$. Так определенная фильтрация является непрерывной справа, а σ-алгебра инвариантных множеств J определяется следующим образом:

$$J=\{A\in\mathscr{F}^{\mathbf{P}}:\mathbf{P}(I_A(\omega)=I_A(\theta_t\omega),\ \forall\, t\in E^1\}.$$

Будем также считать, что M является мартингалом относительно данной фильтрации $\mathrm{F}^{\mathbf{P}}$ и, более того, для любых $t, s, h\in R$

$$M_{t+h}(\omega)-M_{s+h}(\omega)=M_t(\theta_h\omega)-M_s(\theta_h\omega)\quad \mathbf{P}\text{-п. н.},\qquad (4.116)$$

где при $t<0$ M_t доопределяется по формуле

$$M_{-t}(\omega)=-M_t(\theta_{-t}\omega),\ t>0.$$

Замечание. При переходе к соответствующей версии равенство в (4.116) имеет место при всех ω (см. [47]).

Теорема 4.30. Пусть $M=(M_t)_{t\geqslant0}$ — квадратично интегрируемый мартингал, удовлетворяющий свойству (4.116) на стохастическом базисе (Ω, $\mathscr{F}^{\mathbf{P}}$, $\mathrm{F}^{\mathbf{P}}=(\mathscr{F}_t^{\mathbf{P}})_{t\in E^1}$, $\mathbf{P}$) и процесс X^n при каждом $n\geqslant1$ определен формулой (4.115). Тогда

$$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}\eta W\ (J\text{ — устойчиво}),$$

где $W=(W_t)_{t\geqslant0}$ — винеровский процесс, не зависящий от

$$\eta=\{\mathbf{E}(M_1^2|J)\}^{1/2}.$$

Следствие. Если σ-алгебра J содержит множества меры 0 или 1, то $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}\sigma W$, $\sigma=\sqrt{\mathbf{E}M_1^2}$.

Доказательство этой теоремы также вытекает из теоремы 4.29 с $G=J$ и $\mathscr{F}_t^n=\mathscr{F}_{nt}^{\mathbf{P}}$. Условие (0) теоремы 4.29 выполнено, поскольку $J\subseteq\mathscr{F}_0^{\mathbf{P}}$. Условие Линдеберга ($L$) выполнено поскольку, в силу (4.116).

$$\mathbf{E}\sum_{s\leqslant t}(\Delta X_s^n)^2 I(|\Delta X_s^n|>\varepsilon)=\mathbf{E}\,\frac{1}{n}\sum_{s\leqslant nt}(\Delta M_s)^2 I(|\Delta M_s|>\sqrt{n}\,\varepsilon)=$$

$$=\mathbf{E}\sum_{s\leqslant t}(\Delta M_s)^2 I(|\Delta M_s|>\sqrt{n}\,\varepsilon)\to0,\quad n\to\infty.$$

Проверка условия Хинчина (C) основана на том, что свойству (4.116) удовлетворяет и квадратическая вариация $[M, M]$ мартингала M:

$$[M, M]_{t+h}(\omega) - [M, M]_{s+h}(\omega) = [M, M]_t(\theta_h\omega) - \\ - [M, M]_s(\theta_h\omega) \quad \mathbf{P}\text{-п. н.}$$

Тогда

$$[X^n, X^n]_t(\omega) = \frac{1}{n}[M, M]_{nt}(\omega) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{nt}([M, M]_k(\omega) - [M, M]_{k-1}(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{nt}[M, M]_1(\theta_{k-1}\omega).$$

Поэтому в силу теоремы Биркгофа—Хинчина при $n \to \infty$ $\mathbf{P}$-п. н.

$$[X^n, X^n]_t \to t\mathbf{E}([M, M]_1 | J) = t\mathbf{E}(M_1^2 | J).$$

4. Приведенные выше результаты показывают, что успех при доказательстве принципа инвариантности тесно связан с тем, что X^n является мартингалом. В общей ситуации процесс X^n таковым не является. В связи с этим в общей ситуации метод доказательства принципа инвариантности опирается на разложение

$$X^n = M^n + U^n, \tag{4.117}$$

где M^n — квадратично-интегрируемый мартингал, являющийся процессом со стационарными в узком смысле приращениями, U^n асимптотически пренебрежимый процесс.

Разложение (4.117) имеет место при некоторых условиях слабой зависимости величин ξ_t и $\{\xi_s,\ s \leqslant 0\}$ $(t > 0)$. Здесь используются следующие условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| \mathbf{E}(\xi_k | \mathscr{F}_0^\xi) \|_2 < \infty \tag{4.118}$$

или в случае непрерывного времени

$$\int_0^\infty \| \mathbf{E}(\xi_t | \mathscr{F}_0^\xi) \|_2 dt < \infty, \tag{4.119}$$

где $\|\alpha\|_2 = \sqrt{\mathbf{E}\alpha^2}$.

Приведем теперь вспомогательные результаты, необходимые для конструирования разложений (4.117).

Лемма 4.1. Пусть $\xi = (\xi_k)_{-\infty<k<\infty}$ — стационарная в узком смысле последовательность с $\mathbf{E}\xi_0^2 = \sigma^2$, $\mathbf{E}\xi_0 = 0$, для которой выполнено условие (4.118). Тогда при любом $n \geqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k = M_n + V_0 - V_{n+1},$$

где

1) $(M_n)_{n\geq 1}$ — квадратично-интегрируемый мартингал, $M_n = \sum_{k=1}^{n} m_k$, $(m_k)_{k\geq 1}$ — стационарная в узком смысле последовательность

$$m_k = \sum_{i=k}^{\infty} \left[\mathbf{E}\left(\xi_i \mid \mathscr{F}_k^{\xi}\right) - \mathbf{E}\left(\xi_i \mid \mathscr{F}_{k-1}^{\xi}\right)\right]$$

мартингал-разностей ($\mathbf{E}(m_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) = 0$ $\mathbf{P}$-п. н.) с

$$\mathbf{E}m_1^2 = \sigma^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}(\xi_k \xi_0),$$

$$\mathbf{E}\left(m_1^2 \mid J^{\xi}\right) = E\left(\xi_0^2 \mid J^{\xi}\right) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}\left(\xi_k \xi_0 \mid J^{\xi}\right);$$

2) $(V_n)_{n\geq 0}$ — стационарная в узком смысле последовательность с

$$V_n = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}\left(\xi_i \mid \mathscr{F}_n^{\xi}\right),$$

обладающая следующими свойствами: $(V_n, \xi_n)_{n\geq 0}$ — стационарная в узком смысле последовательность,

$$\sup_{t\leq T} \left|\frac{1}{\sqrt{n}} V_{[nt]}\right| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

В случае непрерывного времени будем считать, что $\xi_t(\omega) = \xi(\theta_t \omega)$, где $\theta = (\theta_t)_{t\in E^1}$ — сохраняющее меру преобразование, $\xi(\omega)$ — некоторая случайная величина и стохастический базис $(\Omega, \mathscr{F}^{\mathbf{P}}, \mathbf{F}^{\mathbf{P}}(\mathscr{F}_t^{\mathbf{P}})_{t\in E^1}, \mathbf{P})$ определен таким же образом, как для теоремы 4.30.

Лемма 4.2. Пусть $\xi = (\xi_t)_{t\in E^1}$ — стационарный в узком смысле процесс с $\xi_t(\omega) = \xi(\theta_t \omega)$, $\mathbf{E}\xi^2(\omega) = \sigma^2$, $\mathbf{E}\xi(\omega) = 0$, для которого выполнено условие (4.119). Тогда

$$\int_0^t \xi_s ds = M_t + V_0 - V_t,$$

где

1) $M = (M_t)_{t\geq 0}$ — квадратично-интегрируемый мартингал со свойством (4.116), являющийся версией случайного процесса $M' = (M_t')_{t\geq 0}$ с

$$M_t' = \int_0^{\infty} [\pi_t(\xi_u) - \pi_0(\xi_u)]\, du,$$

$\pi_t(\xi_u)$ — опциональная проекция случайной величины ξ_u относительно $\mathbf{F}^{\mathbf{P}}$ ($\pi_t(\xi_u)=\mathbf{E}(\xi_u|\mathscr{F}_t{}^{\mathbf{P}})$ $\mathbf{P}$-п. н.), обладающий следующими свойствами:

$$\mathbf{E}M_1^2=2\int_0^\infty \mathbf{E}(\xi_t\xi_0)\,dt,$$

$$\mathbf{E}(M_1^2|J)=2\int_0^\infty \mathbf{E}(\xi_t\xi_0|J)\,dt;$$

2) $V_t=(V_t)_{t\geqslant 0}$ — стационарный в узком смысле процесс, являющийся версией случайного процесса $V'=(V_t')_{t\geqslant 0}$ с

$$V_t'=\int_t^\infty \pi_t(\xi_u)\,du$$

такой, что $(V_t,\ \xi_t)_{t\geqslant 0}$ стационарный в узком смысле процесс,

$$\sup_{t\leqslant T}\frac{1}{\sqrt{n}}|V_{nt}|\xrightarrow{\mathbf{P}}0,\quad \forall T>0.$$

Разложения, приведенные в леммах 4.1 и 4.2 позволяют установить, что

$$X_t^n=\frac{1}{\sqrt{n}}M_{[nt]}+\frac{1}{\sqrt{n}}(V_0-V_{[(n+1)t]})$$

($[a]$ — целая часть a) и в случае непрерывного времени

$$X_t^n=\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt}+\frac{1}{\sqrt{n}}(V_0-V_{nt}).$$

Используя теперь свойства последовательностей и процессов $(V_n)_{n>0}$ и $(V_t)_{t>0}$ (см. леммы 4.1 и 4.2), нетрудно понять, что слабые пределы последовательностей (X^n) и $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}M_{[n\cdot]}\right)$ и в случае непрерывного времени (X^n) и $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}M_{n\cdot}\right)$ совпадает.

Теорема 4.31. Пусть $\xi=(\xi_k)_{-\infty<k<\infty}$ — стационарная в узком смысле последовательность с $\mathbf{E}\xi_0{}^2<\infty$ и $\mathbf{E}\xi_0=0$ для которой выполнено условие (4.118).

Тогда

$$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}\eta W\quad (J^\xi\text{ — устойчиво}),$$

где W — винеровский процесс, независящий от

$$\eta=\left\{\mathbf{E}(\xi_0^2|J^\xi)+2\sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}(\xi_k\xi_0|J^\xi)\right\}^{1/2}.$$

Теорема 4.32. Пусть $\xi=(\xi_t)_{t\in R}$ — стационарный в узком смысле процесс с $\mathbf{E}\xi_0^2<\infty$ и $\mathbf{E}\xi_0=0$, для которого выполнено условие (4.119).

Тогда

$$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \eta W \ (J^\xi \text{— устойчиво})$$

где W — винеровский процесс, независящий от $\eta=$

$$=\left\{2\int_0^\infty \mathbf{E}(\xi_t\xi_0 \mid J^\xi)\,dt\right\}^{1/2}.$$

При доказательстве этих теорем можно считать, что ξ координатный процесс и воспользоваться разложениями из лемм 4.1 и 4.2. Тогда доказательства теорем 4.31 и 4.32 является простым следствием результатов из п. 3. Переход к первоначальной формулировке осуществляется обычным образом. Если σ-алгебра J^ξ содержит множества меры 0 или 1, то

$$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} aW,$$

где $a=\left\{\sigma^2+2\sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}\xi_k\xi_0\right\}^{1/2}$ или $a=\left\{2\int_0^\infty \mathbf{E}(\xi_t\xi_0)\,dt\right\}^{1/2}$

в случае непрерывного времени.

5. Остановимся теперь на условиях (4.118), (4.119). Для доказательства принципа инвариантности традиционно использовались условия, выраженные в терминах сильного и равномерно сильного перемешивания $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$ (напомним, что

$$\alpha(t)=\sup|\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|,$$

$$\varphi(t)=\sup|\mathbf{P}(B|A)-\mathbf{P}(B)|,$$

где sup берется по всем множествам $A\in\mathscr{F}_0^\xi$ и $B\in\sigma\{\xi_u,\ u\geqslant t\}$).

Условия, выраженные в терминах $\|\mathbf{E}(\xi_t|\mathscr{F}_0^\xi)\|_2$, оказываются слабее в том смысле, что

$$\left\|\mathbf{E}\left(\xi_t\,|\,\mathscr{F}_0^\xi\right)\right\|_2\leqslant\begin{cases}4C\alpha^{1/2}(t), & |\xi_0|\leqslant C,\\ 2\mathbf{E}\,\|\xi_0\|_2\varphi^{1/2}(t), & \|\xi_0\|_2<\infty\end{cases}$$

(см. [14], [48]). Поэтому условия (4.118) и (4.119) выполнены, если

$$\sum_{k=1}^\infty \alpha^{1/2}(k)<\infty \ \text{ или } \sum_{k=1}^\infty \varphi^{1/2}(k)<\infty,$$

а в случае непрерывного времени

$$\int_0^\infty \alpha^{1/2}(t)\,dt<\infty \ \text{ или } \int_0^\infty \varphi^{1/2}(t)\,dt<\infty.$$

Поскольку $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$ невозрастающие функции, то выполнение указанных выше условий влечет за собой $\alpha(t)\to 0$, $\varphi(t)\to 0$, $t\to\to\infty$. Это означает, что J^{ξ} содержит множества меры 0 или 1. Поэтому $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} aW$, где константа a приводится в конце п. 4.

6. Приведем два примера.

Пример 1. Пусть $Z=(Z_t)_{t\in E^1}$ — случайный процесс с однородными и независимыми приращениями, с непрерывными справа и имеющими пределы слева траекториями, с

$$\mathbf{E}(Z_t-Z_s)^2=|t-s|,\ \mathbf{E}(Z_t-Z_s)=0.$$

Стационарный в узком смысле случайный процесс $\xi=(\xi_t)_{t\in E^1}$ определяется с помощью стохастического интеграла

$$\xi_t=\int_{-\infty}^{t} b(t-s)\,dZ_s$$

от измеримой функции $b=b(t)$ с

$$\int_0^\infty b^2(t)\,dt<\infty.$$

В этом случае σ-алгебра J^{ξ} — содержит множества меры 0 или 1, условие (4.119) равносильно условию

$$\int_0^\infty \left\{\int_t^\infty b^2(s)\,ds\right\}^{1/2} dt<\infty \tag{4.120}$$

и

$$\int_0^\infty \mathbf{E}\,(\xi_t\xi_0)\,dt=\int_0^\infty b(s)\int_0^s b(u)\,du\,ds. \tag{4.121}$$

Поэтому при выполнении (4.120) $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} aW$ с константой $a=\left\{2\int_0^\infty b(s)\int_0^s b(u)\,du\,ds\right\}^{1/2}$. В частности, если в дополнение к (4.120) выполнено и условие

$$\int_0^\infty |b(s)|\,ds<\infty,$$

то

$$a=\left|\int_0^\infty b(s)\,ds\right|.$$

Пример 2. Пусть $\xi=(\xi_t)_{t\geqslant 0}$ — стационарный в узком смысле эргодический процесс с

$$|\xi_0|\leqslant C, \qquad \mathbf{E}\xi_0=0,$$

для которого выполнено условие (4.119).

Предположим, что при каждом $n\geqslant 1$ уравнение

$$Y_t^n=\sqrt{n}\int_0^t \xi_{Y_s^n+ns}\,ds \tag{4.122}$$

относительно $Y^n=(Y_t^n)_{t\geqslant 0}$ имеет решение (существование решения уравнения (4.122) имеет место, если ξ_t гладкая функция с ограниченной производной).

Установим принцип инвариантности для последовательности Y^n, $n\geqslant 1$.

При $n\geqslant 4c^2$ возможна замена переменных $u=Y_s^n+ns$ в интеграле в правой части (4.122). Эта замена приводит к представлению

$$Y_t^n=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{Y_t^n+nt}\frac{\xi_u}{\frac{1}{\sqrt{n}}\xi_u+1}\,du=Z^n_{\frac{Y_t^n}{n}+t},$$

где

$$Z_t^n=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{nt}\frac{\xi_u}{\frac{1}{\sqrt{n}}\xi_u+1}\,du.$$

Поскольку $\sup\limits_{t<T}\frac{|Y_t^n|}{n}\leqslant\frac{CT}{\sqrt{n}}$, то слабые пределы у последовательностей Y^n, $n\geqslant 1$ и Z^n, $n\geqslant 1$ совпадают. Пусть $X_t^n=$ $=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{nt}\xi_u du$. Тогда

$$Z_t^n=X_t^n-\frac{1}{n}\int_0^{nt}\xi_u^2du+\frac{1}{n^{3/2}}\int_0^{nt}\frac{\xi_u^3}{\frac{1}{\sqrt{n}}\xi_u+1}\,du.$$

Последний член в правой части этого представления равномерно стремится к нулю при $n\to\infty$ на любом временном компакте. По эргодической теореме Биркгофа—Хинчина при $n\to\infty$

$$\frac{1}{n}\int_0^{nt}\xi_u^2du\to t\mathbf{E}\xi_0^2 \ \mathbf{P}\text{-п. н.}$$

Отсюда с учетом аналога теоремы Пойа (см. [19], задача 5.4.2) при $n\to\infty$ **P**-п. н.

$$\sup_{t\leqslant T}\left|\frac{1}{n}\int_0^{nt}\xi_u^2\,du-t\mathbf{E}\xi_0^2\right|\to 0,\quad T>0.$$

Наконец, по теореме 4.32 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}aW$ с $a=\left\{2\int_0^\infty \mathbf{E}(\xi_t\xi_0)\,dt\right\}^{1/2}$.

Следовательно,

$$Y_t^n\xrightarrow{\mathscr{L}}Y,$$

где $Y_t=aW_t-t\mathbf{E}\xi_0^2$.

7. **Марковские процессы.** Пусть $(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant0},\mathbf{P})$ стохастический базис, на котором задан прогрессивно измеримый однородный марковский процесс $\zeta=(\zeta_t)_{t\geqslant0}$ с фазовым пространством $(E,\mathscr{E})$. Пусть $f=f(x)$ — $\mathscr{E}$-измеримая функция такая, что

$$\int_0^t|f(\zeta_s)|\,ds<\infty\ \ \mathbf{P}\text{-п. н.},\quad t>0.$$

Принцип инвариантности в данном случае будет формулироваться для последовательности $X^n=(X_t^n)_{t\geqslant0}$, $n\geqslant1$ с

$$X_t^n=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{nt}f(\zeta_s)\,ds. \tag{4.123}$$

Прежде всего приведем необходимые сведения из теории марковских процессов.

Обозначим $p=p(t,x,dy)$ — переходную функцию марковского процесса, $q=q(dx)$ — начальное распределение. С переходной функцией p связан оператор T_t, действующий по формуле

$$T_th(x)=\int_E h(y)\,p(t,x,dy)$$

для любой $\mathscr{E}$-измеримой функции $h=h(y)$ с $\int_{E\times E}|h(y)|\,p(t,x,dy)\times$ $\times q(dx)<\infty$. Семейство $(T_t)_{t>0}$ является полугруппой с операцией $T_tT_s=T_{t+s}$.

Марковская характеризация процесса ζ относительно фильтрации F дается следующим образом в терминах подгруппы $(T_t)_{t\geqslant0}$: для всякой $\mathscr{E}$-измеримой функции $h=h(y)$ с $\int_{E^1\times E^1}|h(y)|\,p(t,x,dy)\,q(dx)<\infty$

$$\mathbf{E}(h(\zeta_t)\,|\,\mathscr{F}_s)=T_{t-s}h(\zeta_s)\ \ \mathbf{P}\text{-п. н.},\quad t>s. \tag{4.124}$$

Вероятностная мера $r=r(dx)$ на $(E, \mathscr{E})$ называется *инвариантной*, если для любой ограниченной и $\mathscr{E}$-измеримой функции

$$\int_E T_t h(x) r(dx) = \int_E h(x) r(dx), \quad t>0.$$

Если $q(dx)=r(dx)$, то однородный марковский процесс ζ является стационарным в узком смысле процессом.

Пусть $L_2(E, \mathscr{E}, r)$ — гильбертово пространство функций $h=h(y)$ с нормой $\|h\|_2 = \left(\int_E h^2(y) r(dy)\right)^{1/2}$. Обозначим B_0 центр полугруппы $(T_t)_{t>0}$:

$$B_0 = \{h \in L_2(E, \mathscr{E}, r): \lim_{t\to 0} \|T_t h - h\|_2 = 0\}.$$

Инфинитезимальным оператором полугруппы $(T_t)_{t>0}$ относительно $L_2(E, \mathscr{E}, r)$ называют оператор A с областью определения:

$$D_A = \left\{h \in B_0 : \exists g \in B_0, \ \lim_{t\to 0} \left\| \frac{T_t h - h}{t} - g \right\|_2 = 0\right\},$$

задаваемый соотношением:

$$\lim_{t\to 0} \left\| Ah - \frac{T_t h - h}{t} \right\|_2 = 0.$$

Обозначим $R_A = \{Ah : h \in D_A\}$ т. е. R_A — множество значений оператора A.

Для функции $h \in D_A$ и любого $t>0$ имеет место формула Дынкина

$$T_t h(x) = h(x) + \int_0^t T_u Ah(x)\, du \ \ r\text{-п. н.} \tag{4.125}$$

8. Предположим, что

$$q(dx) = r(dx).$$

В этом случае ζ — стационарный в узком смысле процесс. Предположим также, что ζ — эргодический процесс.

При доказательстве принципа инвариантности без потери общности можно считать, что ζ — координатный процесс, и доопределить его при $t<0$.

Обозначим

$$\xi_t = f(\zeta_t).$$

Очевидно, что процесс $\xi = (\xi_t)_{t \in L^1}$ является стационарным в узком смысле и эргодическим процессом. Если

$$\mathbf{E}\xi_0^2 < \infty, \quad \mathbf{E}\xi_0 = 0$$

и для процесса ξ выполнено условие (4.119), то по теореме 4.32 для последовательности X^n, $n\geqslant 1$ справедлив принцип инвариантности:

$$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} aW,$$

где W — винеровский процесс,

$$a=\left\{2\int\limits_0^\infty \mathbf{E}\,(f(\zeta_t)\,f(\zeta_0))\,dt\right\}^{1/2}.$$

Марковское свойство процесса ζ позволяет дать достаточное условие для (4.119). А именно, в силу неравенства

$$\|\mathbf{E}\,(\xi_t\mid\mathscr{F}_0^\xi)\|_2\leqslant\|\mathbf{E}\,(\xi_t\mid\mathscr{F}_0)\|_2,$$

вытекающего из включения $\mathscr{F}_0^\xi\subseteq\mathscr{F}_0$, и (4.124),

$$\|\mathbf{E}\,(\xi_t\mid\mathscr{F}_0^\xi)\|_2\leqslant\left(\int\limits_E (T_tf\,(x))^2\,r\,(dx)\right)^{1/2}=\|T_tf\|_2.$$

Значит, принцип инвариантности для X^n, $n\geqslant 1$ имеет место при выполнении условия

$$\int\limits_0^\infty \|T_tf\|_2\,dt<\infty.$$

9. Более тонкие результаты можно получить, используя свойства инфинитезимального оператора A.

Пусть функция $f=f(x)$ принадлежит R_A — множеству значений оператора A. Тогда

1) $\int\limits_E f^2(x)\,r\,(dx)<\infty$, $\int\limits_E f\,(x)\,r\,(dx)=0$;

2) уравнение

$$Ag=f$$

имеет решение с функцией $g=g(x)$ такой, что $\int\limits_E g^2(x)\,r\,(dx)<\infty$, (при условии $\int\limits_0^\infty\|T_tf\|_2dt<\infty$

$$g\,(x)=-\int\limits_0^\infty T_tf\,(x)\,dt\Bigg);$$

3) если 0 является простым собственным числом оператора A и $q=r$, то при условии $\int\limits_E g\,(x)\,r\,(dx)=0$ уравнение $Ag=f$ имеет единственное решение;

4) если 0 является простым собственным числом оператора A, то марковский процесс ζ является эргодическим.

Теорема 4.33. Пусть $q(dx)=r(dx)$ и 0 является простым собственным числом оператора A. Тогда

$$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} aW,$$

где W — винеровский процесс,

$$a=\left\{-2\int\limits_E g(x) f(x) r(dx)\right\}^{1/2},$$

g — решение уравнения $Ag=f$.

Доказательство этой теоремы опирается на формулу Дынкина (4.125), примененной к функции g — решению уравнения $Ag=f$. В силу этой формулы, можно определить квадратично интегрируемый мартингал $M=(M_t)_{t\geqslant 0}$ относительно фильтрации $\mathbf{F}$, являющийся процессом со стационарными в узком смысле приращениями такой, что

$$M_t=g(\zeta_t)-g(\zeta_0)-\int\limits_0^t f(\zeta_u)\,du \quad \mathbf{P}\text{—п. н.},\ t>0$$

с

$$\mathbf{E}M_t^2=-2t\int\limits_E f(x) g(x) r(dx).$$

В этом случае

$$X_t^n=\frac{1}{\sqrt{n}}[g(\zeta_{nt})-g(\zeta_0)]-\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt}$$

и используются следующие факты:

$$\sup_{t\leqslant T}\frac{1}{\sqrt{n}}|g(\zeta_{nt})| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad \forall T>0.$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}M_{n\cdot} \xrightarrow{\mathscr{L}} aW,$$

где

$$a=\sqrt{\mathbf{E}M_1^2}.$$

10. Если $q(dx)\neq r(dx)$, марковский процесс ζ уже не является стационарным в узком смысле процессом. В этом случае его можно аппроксимировать в некотором смысле стационарным эргодическим процессом с $q(dx)=r(dx)$.

С этой целью при фиксированных t, x рассмотрим меру со знаком

$$\mu_{t,x}(dy)=p(t,x,dy)-r(dy)$$

и обозначим $\mathrm{Var}(\mu_{t,x})$ полную вариацию этой меры. Существенную роль здесь играет условие: при каждом $x \in E$

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Var}(\mu_{t,x}) = 0 \tag{4.126}$$

Если выполнено условие (4.126), то 0 является простым собственным числом оператора A и, значит, при $q=r$ (4.126) обеспечивает эргодичность процесса ζ.

Теорема 4.34. Пусть $q \neq r$, $f \in R_A$ и выполнено условие (4.126). Тогда утверждение теоремы 4.33 остается справедливым.

Доказательство. Если $q=r$, то ζ — стационарный в узком смысле эргодический процесс и имеет место утверждение теоремы 4.33. Определим процесс $\widetilde{X}^n = (\widetilde{X}^n_t)_{t \geqslant 0}$ с

$$\widetilde{X}^n_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_{n^{1/4}}^{n^{1/4}+nt} f(\zeta_s)\, ds.$$

Если $q=r$, то $\widetilde{X}^n \overset{\mathscr{L}}{=} X^n$ и, значит, $\widetilde{X}^n \xrightarrow{\mathscr{L}} aW$.

Пусть $\psi = \psi(X)$, $X \in D$ — ограниченная константой K, непрерывная в топологии Скорохода функция. Обозначим $\mathbf{E}_q$ — математическое ожидание, отвечающее распределению процесса ζ с начальным распределением q. Имеет место оценка

$$|\mathbf{E}_q \psi(\widetilde{X}^n) - \mathbf{E}_r \psi(\widetilde{X}^n)| \leqslant K\, \mathrm{Var}(\mu_{n^{1/4},x}),$$

согласно которой, в силу (4.126)

$$\lim_n \mathbf{E}_q \psi(\widetilde{X}^n) = \lim_n \mathbf{E}_r \psi(\widetilde{X}^n) = \mathbf{E}\psi(aW),$$

где $\mathbf{E}$ — математическое ожидание, отвечающее винеровской мере.

Таким образом, $\widetilde{X}^n \xrightarrow{\mathscr{L}} aW$ при $q \neq r$. Далее, определим процесс $\hat{X}^n = (\hat{X}^n_t)_{t \geqslant 0}$ с

$$\hat{X}^n_t = \widetilde{X}^n_{(t-n^{-3/4}) \vee 0}.$$

Доказательство теоремы завершается проверкой соотношений

$$\hat{X}^n \xrightarrow{\mathscr{L}} aW \quad \text{и} \quad \sup_{t \leqslant T} |\hat{X}^n_t - X^n_t| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

§ 2. Стохастический принцип усреднения в моделях без диффузии

1. Стохастический принцип усреднения Боголюбова. Рассмотрим дифференциальное уравнение с малым параметром ε ($\varepsilon>0$):

$$\dot{x}_t^\varepsilon=\varepsilon b(x_t^\varepsilon, \xi_t), \quad x_0^\varepsilon=x_0, \tag{4.127}$$

где $b=b(x,y)$ — непрерывная по совокупности переменных функция, удовлетворяющая условиям линейного роста и Липшица по x равномерно по y, $\xi=(\xi_t)_{t\geqslant0}$ — измеримый случайный процесс с эргодическим свойством:

$$\frac{1}{t}\int_0^t h(x, \xi_s)\,ds\xrightarrow{\mathrm{P}}\int_{E^1} h(x, y)\,\rho(dy), \quad t\to\infty, \quad x\in E^1 \tag{4.128}$$

для любой измеримой функции $h=h(x, y)$ с $\int\limits_{E^1}|h(x, y)|\,\rho(dy)<\infty$, где $\rho=\rho(dy)$ — некоторая вероятностная мера на E^1.

Поскольку ε — малый параметр, то x_t^ε мало отличается от x_0. Поэтому поведение процесса (x_t^ε) естественно изучать на временных интервалах типа $[0, \varepsilon^{-1}]$. С этой целью рассмотрим процесс с «растянутым временем» $X^\varepsilon=(X_t^\varepsilon)_{t\geqslant0}$ с

$$X_t^\varepsilon=x_{t/\varepsilon}^\varepsilon.$$

Функция $X^\varepsilon=(X_t^\varepsilon)_{t\geqslant0}$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{X}_t^\varepsilon=b(X_t^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}), \quad X_0^\varepsilon=x_0 \tag{4.129}$$

со случайным возмущением в «быстром времени» $(\xi_{t/\varepsilon})$.

Стохастический принцип усреднения Боголюбова заключается в аппроксимации X^ε детерминированной функцией $X=(X_t)_{t\geqslant0}$, определяемой дифференциальным уравнением

$$\dot{X}_t=\overline{b}(X_t), \qquad X_0=x \tag{4.130}$$

с усредненной правой частью

$$\overline{b}(x)=\int_{E^1} b(x, y)\,\rho(dy), \tag{4.131}$$

в следующем смысле: для любого $T>0$

$$\sup_{t<T}|X_t^\varepsilon-X_t|\xrightarrow{\mathrm{P}}0, \quad \varepsilon\to0. \tag{4.132}$$

Доказательство (4.132) вытекает из интегрального неравенства для $\Delta_t^\varepsilon = |X_t^\varepsilon - X_t|$, выводимого из (4.129) и (4.130): $(t \leqslant T)$,

$$\Delta_t^\varepsilon \leqslant \int_0^t |b(X_s^\varepsilon, \xi_{s/\varepsilon}) - b(X_s, \xi_{s/\varepsilon})|\, ds +$$

$$+ \left| \int_0^t [b(X_s, \xi_{s/\varepsilon}) - \bar{b}(X_s)]\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant L \int_0^t \Delta_s^\varepsilon ds + \sup_{t \leqslant T} \left| \int_0^t [b(X_s, \xi_{s/\varepsilon}) - \bar{b}(X_s)]\, ds \right|,$$

где L — константа Липшица.

Отсюда с учетом неравенства Гронуолла—Беллмана получаем, что

$$\sup_{t \leqslant T} \Delta_t^\varepsilon \leqslant e^{LT} \sup_{t \leqslant T} \left| \int_0^t [b(X_s, \xi_{s/\varepsilon}) - \bar{b}(X_s)]\, ds \right|.$$

Требуемое соотношение (4.132) выводится отсюда с использованием результата, представляющего самостоятельный интерес.

Теорема 4.35. Пусть ξ — случайный процесс, удовлетворяющий условию (4.128). Если функция $h = h(x, y)$ из (4.128) удовлетворяет условию Липшица по x равномерно по y, то для любого $T > 0$

$$\sup_{t \leqslant T} \left| \int_0^t [h(x_s, \xi_{s/\varepsilon}) - \bar{h}(x_s)]\, ds \right| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad \varepsilon \to 0, \tag{4.133}$$

где $\bar{h}(x) = \int_{E^1} h(x, y)\rho(dy)$, $(x_t)_{t \geqslant 0}$ — непрерывная функция.

Замечание. Если в (4.128) имеет место сходимость $\mathbf{P}$-п.н., то в (4.133) также имеет место сходимость $\mathbf{P}$-п. н. В частности, если $\xi = (\xi_t)_{t \geqslant 0}$ — стационарный в узком смысле эргодический процесс, то теорема 4.35 обобщает эргодическую теорему Биркгофа—Хинчина.

2. Принцип усреднения в модели массового обслуживания. Пусть имеется один конечный источник заявок объема n и один обслуживающий прибор. Очередь к обслуживающему прибору Q_t в момент времени t задается балансовым соотношением

$$Q_t = Q_0 + A_t - D_t,$$

где Q_0 — начальная очередь, $A = (A_t)_{t \geqslant 0}$, $D = (D_t)_{t \geqslant 0}$ — считающие процессы с несовпадающими моментами скачков поступления и обслуживания заявок. Относительно фильтрации, порожденной процессом очереди A и D имеют компенсаторы

$$\widetilde{A}_t=\int_0^t \lambda(n-Q_s)\,ds, \quad \widetilde{D}_t=\int_0^t I(Q_s>0)\,nf\left(\frac{Q_s}{n}\right)ds,$$

где $f=f(x)$ — неотрицательная функция, удовлетворяющая условию Липшица, $\lambda>0$.

Случайная величина Q_t принимает $n+1$ значение. Поэтому при больших значениях n анализ данной марковской модели встречает определенные трудности. В связи с этим рассмотрим нормированную очередь $q^n=(q_t^n)$ с

$$q_t^n=\frac{1}{n}Q_t.$$

и изучим вопрос о предельном поведении q^n при $n\to\infty$.

Из балансового соотношения для Q_t и определения компенсаторов $\widetilde{A}_t$ и $\widetilde{D}_t$ имеем

$$q_t^n=q_0^n+\int_0^t \lambda(1-q_s^n)ds-\int_0^t I(q_s^n>0)\,f(q_s^n)\,ds+M_t^n,$$

где $M^n=(M_t^n)_{t\geqslant 0}$ — квадратично-интегрируемый мартингал с

$$M_t^n+\frac{1}{n}(A_t-\widehat{A}_t)-\frac{1}{n}(D_t-\widehat{D}_t),$$

и квадратической характеристикой

$$\langle M^n\rangle_t=\frac{1}{n}\int_0^t[\lambda(1-q_s^n)+I(q_s^n>0)\,f(q_s^n)]\,ds.$$

Поскольку $0\leqslant q_t^n\leqslant 1$, то для любого $t>0$ $\langle M^n\rangle_t\to 0,\ n\to\infty$. Отсюда следует, что $\sup\limits_{s\leqslant t}|M_s^n|\xrightarrow{\mathbf{P}}0,\ n\to\infty,\ \forall t>0$. Поэтому вопрос об аппроксимации процессов q^n, $n\to\infty$ детерминированной функцией $q=(q_t)_{t\geqslant 0}$ решается, если q_t строго положительное решение дифференциального уравнения

$$\dot{q}_t=\lambda(1-q_t)-f(q_t), \tag{4.134}$$

в том смысле, что при условии $q_0^n\xrightarrow{\mathbf{P}}\mathbf{q}_0$ ($\mathbf{q}_0$ — начальное условие для (4.134))

$$\sup_{t\leqslant T}|q_t^n-q_t|\xrightarrow{\mathbf{P}}0,\ n\to\infty,\ \forall T>0.$$

§ 3. Диффузионная аппроксимация семимартингалов. Принцип усреднения в моделях с диффузией

1. Пусть при каждом $n \geqslant 1$ $X_n (X_i^n)_{i \leqslant d}$ — семимартингал со значениями в R^d на стохастическом базисе $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$ с триплетом предсказуемых характеристик $T^n = (B^n, C^n, \nu^n)$ с функцией урезания

$$h(x) = xI(|x| \leqslant 1).$$

Из общей теоремы о сходимости последовательности семимартингалов к семимартингалу (теорема (4.24)) можно вывести условие слабой сходимости

$$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X, \tag{4.135}$$

где $X = (X_i)_{i \leqslant d}$ — единственное слабое решение стохастического уравнения Ито

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X)\,ds + \int_0^t c(s, X)\,dW_s, \tag{4.136}$$

относительно винеровского процесса $W = (W_i)_{i \leqslant d}$ с независимыми компонентами, т. е. X — семимартингал с триплетом предсказуемых характеристик $T(X) = (B(X), C(X), 0)$:

$$B_t(X) = \int_0^t b(s, X)\,ds, \quad C_t(X) = \int_0^t c(s, X)\,c^*(s, X)\,ds,$$

($*$ — знак транспонирования).

Будем считать, что X — координатно заданный процесс,

$$D = D[0, \infty)(R^d), \quad \mathscr{D}_t = \sigma\{X_s, s \leqslant t\},$$

Q — распределение X — единственное слабое решение уравнения (4.136). Элементы вектора $b(t, X)$ и матрицы $c(t, X)$ предполагаются $\mathscr{B}(R_+) \otimes \mathscr{D}_\infty$ — измеримыми и $\mathscr{D}_t$ — измеримыми при каждом t. Таким образом, X — семимартингал на стохастическом базисе $(D, \mathscr{D}^{\mathbf{Q}}_\infty, \mathbf{D}^{\mathbf{Q}}_+, \mathbf{Q})$, где $\mathscr{D}^{\mathbf{Q}}_\infty$ — пополнение $\mathscr{D}_\infty$ по мере $\mathbf{Q}$, $\mathbf{D}^{\mathbf{Q}}_\infty = (\mathscr{D}_{t+} \vee \mathscr{N})_{t \geqslant 0}$, $\mathscr{D}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathscr{D}_{t+\varepsilon}$, $\mathscr{N}$ — совокупность множеств из $\mathscr{D}^{\mathbf{Q}}_\infty$ $\mathbf{Q}$ — меры нуль.

Соответствующий результат о слабой сходимости (4.135) формулируется следующим образом.

Теорема 4.36. Пусть выполнены следующие условия.

1) Если $h(t, X)$ обозначает любой из элементов вектора $b(t, X)$ или матрицы $c(t, X)$, то

$$|h(t, X)| \leqslant L\left(1 + \sup_{s<t} |X(s)|\right), \quad \left(|X(s)| = \sum_{i<d} |X_i(s)|\right),$$

при каждом $t\in S$ $\left(S \text{ — всюду плотное множество в } R_+ \int\limits_{R_+\setminus S} dt=0\right)$ $h(t, X)$ — непрерывна в метрике Скорохода в точке $X\in C$;

2) $X_0^n \xrightarrow{d} X_0$;

3) для любых $L>0$, $\varepsilon>0$ и $a\in(0, 1]$

$$(A)\lim_n \mathbf{P}^n\left(\int\limits_0^L \int\limits_{|x|>a} d\nu^n > \varepsilon\right)=0,$$

$$(\sup B)\lim_n \mathbf{P}^n\left(\sup_{t\leqslant L}\left|B_t^n-\int\limits_0^t b(s, X^n)ds\right|>\varepsilon\right)=0,$$

$$(\sup C)\lim_n \mathbf{P}^n\left(\sup_{t\leqslant L}\left|\langle M^{na}\rangle_t-\int\limits_0^t c(s, X^n)c^*(s, X^n)ds\right|>\varepsilon\right)=0$$

$$\left(\langle M^{na}\rangle_t=C_t^n+\int\limits_0^t\int\limits_{|x|\leqslant a} xx^*d\nu^n-\right.$$

$$\left.-\sum_{s\leqslant t}\int\limits_{|x|\leqslant a} x\nu^n(\{s\}, dx)\left(\int\limits_{|x|\leqslant a} x\nu^n(\{s\}, dx)\right)^*\right).$$

Тогда имеет место слабая сходимость (4.135), где X единственное слабое решение уравнения (4.136).

2. Приведем два примера, в которых используется теорема 4.36.

Пример 1. Рассмотрим второе приближение в задаче стохастического принципа усреднения Боголюбова. Пусть X^ε и X определяются дифференциальными уравнениями (4.129) и (4.130).

Определим процесс $Y^\varepsilon=(Y_t^\varepsilon)_{t\geqslant 0}$ из условия

$$X_t^\varepsilon=X_t+\sqrt{\varepsilon}\,Y_t^\varepsilon.$$

Если $Y^\varepsilon\xrightarrow{\mathscr{L}}Y$, то говорят, что в задаче стохастического усреднения Боголюбова существует второе приближение порядка $\sqrt{\varepsilon}$.

Факт существования второго приближения устанавливается при дополнительных предположениях на процесс ξ. А именно, $\xi=(\xi_t)_{t\in E}$ — стационарный в узком смысле эргодический процесс, для которого (4.128) выполняется в силу теоремы Биркгофа—Хинчина. Кроме того, предполагаются выполненными следующие условия:

$$\sup\|b(x, \xi_0)\|_p<\infty, \quad p>2,$$
$$\int\limits_0^\infty \operatorname{ess\,sup}\|\mathbf{E}(b(x, \xi_t)-\bar b(x)\mid\mathscr{F}_0^\xi)\|_p dt<\infty, \quad p>2 \tag{4.137}$$

($\|\alpha\|_p=(\mathbf{E}|\alpha|^p)^{1/p}$, где sup и ess sup берутся по множеству $\{x:|x|\leqslant\sup\limits_{t\geqslant 0}|X_t|\}$, X_t — решение дифференциального уравнения (4.130).

Теорема 4.37. Пусть $\xi=(\xi_t)_{t\in R}$ — стационарный в узком смысле эргодический процесс, для которого выполнены условия (4.137) с некоторым $p>2$, а функция $b=b(x,y)$ непрерывна по совокупности переменных, при каждом y дифференцируема по x, функция $b_x=b_x(x,y)$ равномерно ограничена и удовлетворяет условию Липшица по x равномерно по y.

Тогда

$$Y^\varepsilon\xrightarrow{\mathscr{L}}Y,\quad \varepsilon\to 0,$$

где $Y=(Y_t)_{t\geqslant 0}$ — диффузионный процесс, определяемый стохастическим уравнением Ито

$$Y_t=\int\limits_0^t a(X_s)Y_s ds+\int\limits_0^t \sigma(X_s)\,dW_s$$

относительно винеровского процесса $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$, где

$$a(x)=\mathbf{E}b_x(x,\xi_0),$$

$$\sigma(x)=\left\{2\int\limits_0^\infty[\mathbf{E}(b(x,\xi_t)\,b(x,\xi_0))-\bar{b}^2(x)]\,ds\right\}^{1/2},$$

X_t — решение уравнения (4.130).

Доказательство этой теоремы опирается на теорему 4.36 и следующее обобщение принципа инвариантности для стационарных процессов.

Теорема 4.38. Пусть заданы:

1) измеримая по паре переменных функция $b=b(x,y)$, удовлетворяющая условию Липшица по x равномерно по y;

2) $Z=(Z_t)_{t\geqslant 0}$ — непрерывная функция,

3) стационарный в узком смысле эргодический процесс $\xi=(\xi_t)_{t\in R}$, удовлетворяющий условиям (4.137) с данной функцией $b=b(x,y)$ при некотором $p>2$, в которых sup и ess sup берутся по множеству $\{x:|x|\leqslant\sup\limits_{t\geqslant 0}|Z_t|\}$.

Для $\varepsilon>0$ положим

$$Y_t^\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_0^t[b(Z_s,\xi_{s/\varepsilon})-\mathbf{E}b(Z_s,\xi_0)]\,ds.$$

Тогда при $\varepsilon\to 0$

$$Y^\varepsilon\xrightarrow{\mathscr{L}}Y,$$

где $Y=(Y_t)_{t\geq 0}$ стохастический интеграл по винеровскому процессу

$$Y_t=\int_0^t \sigma(Z_s)\,dW_s,$$

$$\sigma(z)=\left\{2\int_0^\infty [\mathrm{E}(b(z,\xi_t)b(z,\xi_0))-(\mathrm{E}b(z,\xi_0))^2]\,dt\right\}^{1/2}.$$

Пример 2. Рассмотрим второе приближение в модели массового обслуживания (см. § 2). Определим процесс $X^n=(X_t^n)_{t\geq 0}$ из соотношения

$$q_t^n=q_t+\frac{1}{\sqrt{n}}X_t^n.$$

Если $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$, то говорят, что в модели массового обслуживания имеет место второе приближение очереди порядка $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

С помощью теоремы 4.36 в предположении, что функция $f=f(x)$ непрерывно дифференцируема и ее производная удовлетворяет условию Липшица, $X_0^n\xrightarrow{d}X_0$ существует второе приближение очереди порядка $\frac{1}{\sqrt{n}}$. При этом X решение стохастического уравнения Ито

$$X_t=X_0-\int_0^t(\lambda+f'(q_s))X_s\,ds+\int_0^t\{\lambda(1-q_s)+f(q_s)\}^{1/2}dW_s$$

относительно винеровского процесса $W=(W_t)_{t\geq 0}$, q_t — решение дифференциального уравнения (4.134).

3. Принцип усреднения в моделях с диффузией. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение с малым параметром $\varepsilon>0$

$$dx_t^\varepsilon=\varepsilon b(x_t^\varepsilon,\xi_t)\,dt+\sqrt{\varepsilon}\,\sigma(x_t^\varepsilon,\xi_t)\,dW_t,\quad x_0^\varepsilon=x \tag{4.138}$$

относительно винеровского процесса $W=(W_t)_{t\geq 0}$ независящего от измеримого случайного процесса $\xi=(\xi_t)_{t\geq 0}$, удовлетворяющего эргодическому свойству (4.128). Замена времени t/ε приводит к стохастическому уравнению Ито для $X_t^\varepsilon=x_{t/\varepsilon}^\varepsilon$

$$dX_t^\varepsilon=b(X_t^\varepsilon,\xi_{t/\varepsilon})\,dt+\sigma(X_t^\varepsilon,\xi_{t/\varepsilon})\,dW_t^\varepsilon,\quad X_0^\varepsilon=x_0$$

относительно винеровского процесса $W_t^\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}\,W_{t/\varepsilon}$.

Предположим, что функции $b=b(x,y)$ и $\sigma=\sigma(x,y)$ непрерывны по совокупности переменных, удовлетворяют условию Липшица и линейного роста по x равномерно по y.

Обозначим

$$\overline{b}(x)=\int_{E^1} b(x,\ y)\rho(dy)$$
$$\overline{\sigma}(x)=\left\{\int_{E^1}\sigma^2(x,\ y)\rho(dy)\right\}^{1/2} \tag{4.139}$$

С помощью теоремы 4.36 устанавливается принцип усреднения:

$$X^{\varepsilon}\xrightarrow{\mathscr{L}}X,\quad \varepsilon\to 0,$$

где $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ — диффузионный процесс, определяемый стохастическим уравнением Ито с «усредненными параметрами $\overline{b}=\overline{b}(x)$ и $\overline{\sigma}=\overline{\sigma}(x)$» (см. (4.139)):

$$dX_t=\overline{b}(X_t)\,dt+\overline{\sigma}(X_t)\,d\overline{W}_t,\quad X_0=x_0 \tag{4.140}$$

относительно некоторого винеровского процесса $\overline{W}=(\overline{W}_t)_{t\geqslant 0}$.

§ 4. Диффузионная аппроксимация для систем с физическим белым шумом

1. При рассмотрении физических систем часто возникает интерес к изучению свойств случайного процесса, определяемого обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}_t=a(t,\ x_t)+b(t,\ x_t)\dot{W}_t,$$

где $\dot{W}_t$ — физический белый шум. В такой ситуации естественной является аппроксимация процесса (x_t) некоторым диффузионным марковским процессом, целесообразность которой оправдывается тем, что исследование свойств диффузионного марковского процесса, как правило, проще, нежели изучение свойств процесса (x_t).

В связи с этим рассмотрим последсвательность $X^n=(X_t^n)_{t\geqslant 0}$, $n\geqslant 1$ решений дифференциальных уравнений

$$\dot{X}_t^n=a(t,\ X_t^n)+b(t,\ X_t^n)\dot{W}_t^n,\quad X_0^n\equiv X^0, \tag{4.141}$$

где $\dot{W}^n=(\dot{W}_t^n)_{t\geqslant 0}$, $n\geqslant 1$ — последовательность физических белых шумов.

Обозначим

$$W_t^n=\int_0^t \dot{W}_t^n\,ds$$

и предположим, что последовательность случайных процессов $W^n=(W_t^n)_{t\geqslant 0}$, $n\geqslant 1$ слабо сходится в топологии Скорохода к

$\sigma W=(\sigma W_t)_{t\geq 0}$, где $W=(W_t)_{t\geq 0}$ — винеровский процесс, σ — константа.

В этом случае под аппроксимацией процессов X^n, $n\geq 1$, естественно понимать слабую сходимость

$$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$$

к диффузионному процессу X, определяемому стохастическим уравнением Ито относительно винеровского процесса W.

Имеются два подхода для такой аппроксимации.

2. Первый подход основан на идее виброкорректности Красносельского и Покровского [16], заключающейся в том, что X^n является непрерывным отображением W^n.

Сформулируем соответствующий результат.

Теорема 4.39. Пусть

1) $a=a(t, x)$ — непрерывная по совокупности переменных функция, удовлетворяющая условиям Липшица и линейного роста по x равномерно по t;

2) $b=b(t, x)$ непрерывная по совокупности переменных функция вместе со своими частными производными $b_t=b_t(t, x)$ и $b_x=b_x(t, x)$;

3) функции $b_t(t, x)$, $b_x(t, x)$, $b(t, 0)$ — равномерно ограничены;

4) $b_x=b_x(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по x равномерно по t.

Тогда

$$W^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \sigma W \Rightarrow X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X,$$

где $X=(X_t)_{t\geq 0}$ — решение стохастического уравнения Ито

$$X_t=X_0+\int_0^t \left[a(s, X_s)+\frac{\sigma^2}{2} b_x(s, X_s)\, b(s, X_s)\right] ds + \int_0^t \sigma b(s, X_s)\, dW_s. \tag{4.142}$$

Доказательство основано на виброкорректном преобразовании:

$$X_t^n=Q(W_t^n, 0, Z_t^n, t),$$

$$\dot{Z}_t^n=a(t, Q(W_t^n, 0, Z_t^n, t)),\ Z_0^n=X_0,$$

где

$$Q(s, s_0, y_0, t)=y_s,$$

а y_s — решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy_s}{ds}=b(t, y_s),\ y_{s_0}=y_0.$$

Это преобразование позволяет установить, что

$$W^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \sigma W \Rightarrow (X^n,\ Z^n,\ W^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X,\ Z,\ \sigma W),$$

где

$$X_t = Q(\sigma W_t,\ 0,\ Z_t\ t),$$

$$\dot{Z}_t = a(t,\ Q(\sigma W,\ 0,\ Z_t,\ t)),\ Z_0 = X_0.$$

При этом стохастическое уравнение для X выводится отсюда с помощью формулы Ито.

Достоинство виброкорректного метода состоит в том, что не требуется никаких дополнительных предположений о структуре процессов $\dot{W}^n$, $n \geqslant 1$. Однако этот метод, вообще говоря, не работает в векторном случае без дополнительного условия Фробениуса, сильно ограничивающего структуру матрицы $b(t, x)$ (в векторном случае $b(t, x)$ — матрица, W_t^n — вектор).

3. Второй метод аппроксимации $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ работает как в скалярном, так и в векторном случае. Однако он требует дополнительных предположений о $\dot{W}^n$.

Теорема 4.40. Пусть

1) $a = a(t, x)$ — непрерывная по совокупности переменных функция, удовлетворяющая условиям Липшица и линейного роста по x равномерно по t;

2) $b = b(t, x)$ — непрерывная по совокупности переменных и ограниченная функция вместе со своими частными производными $b_t = b_t(t, x)$, $b_x = b_x(t, x)$, $b_{xt} = b_{xt}(t, x)$, $b_{xx} = b_{xx}(t, x)$;

3) $\dot{W}_t^n = \sqrt{n}\ \xi_{nt}$, где $\xi = (\xi_t)_{t \in E^1}$ — стационарный в узком смысле эргодический процесс такой, что

$$\mathbf{E}\xi_0^2 < \infty, \quad \mathbf{E}\xi_0 = 0,$$

$$\int_0^\infty \|\mathbf{E}(\xi_t \mid \mathscr{F}_0^\xi)\|_2\, dt < \infty \quad (\mathscr{F}_0^\xi = \sigma\{\xi_s,\ -\infty < s \leqslant 0\}).$$

Тогда

$$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X,$$

где $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ — решение стохастического уравнения (4.142) относительно некоторого винеровского процесса $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ и $\sigma = \left\{2\int_0^\infty \mathbf{E}(\xi_t \xi_0)\, dt\right\}^{1/2}$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$W_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} \xi_s ds.$$

В силу условия 3) теоремы и леммы 4.2 процесс $W^n=(W_t^n)_{t\geq 0}$ допускает разложение

$$W_t^n=\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt}+\frac{1}{\sqrt{n}}(V_0-V_{nt}), \tag{4.143}$$

где $M=(M_t)_{t\geq 0}$ — квадратично-интегрируемый мартингал, являющийся процессом со стационарными в узком смысле приращениями, $V=(V_t)_{t\geq 0}$ — стационарный в узком смысле процесс такой, что $(V_t, \xi_t)_{t\geq 0}$ — стационарный в узком смысле процесс. Обозначим

$$M_t^n=\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt}, \quad V_t^n=\frac{1}{\sqrt{n}}V_{nt}.$$

Отсюда и из (4.141) и (4.143) следует, что

$$X_t^n=X_0+\int_0^t a(s, X_s^n)\,ds+\int_0^t b(s, X_s^n)\,dM_s^n-\int_0^t b(s, X_s^n)\,dV_s^n,$$

где интегралы по dM^n и dV^n являются соответственно стохастическими интегралами по квадратично интегрируемому мартингалу и семимартингалу, соответственно. Интегрирование по частям в $\int_0^t b(s, X_s^n)\,dV_s^n$ приводит к соотношению

$$\int_0^t b(s, X_s^n)\,dV_s^n=-\int_0^t b_x(s, X_s^n)\,b(X_s^n)V_s^n\dot{W}_s^n ds+\alpha_t^n,$$

где в α_t^n собраны все оставшиеся члены.

Таким образом

$$X_t^n=X_0+\int_0^t\left[a(s, X_s^n)+b_x(s, X_s^n)\,b(s, X_s^n)V_s^n\dot{W}_s^n\right]ds+$$

$$+\int_0^t b(s, X_s^n)\,dM_s^n+\alpha_t^n.$$

Из стационарности в узком смысле и эргодичности ξ вытекает стационарность в узком смысле и эргодичность $(V_t^n, \dot{W}_t^n)_{t\geq 0}$. При этом

$$\mathbf{E}V_t^n\dot{W}_t^n=\mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}V_{nt}\sqrt{n}\,\xi_{nt}\right)=\mathbf{E}V_0\xi_0.$$

Из леммы 4.2 следует, что $V_0=\int_0^\infty \mathbf{E}(\xi_u\,|\,\mathscr{F}_0^\xi)\,du$. Следовательно,

$\mathbf{E}V_0\xi_0=\int\limits_0^t \mathbf{E}(\xi_u\xi_0)\,du=\frac{\sigma^2}{2}$. Далее

$$\int\limits_0^t V_s^n \dot{W}_s^n ds=\int\limits_0^t V_{ns}\xi_{ns}ds=\frac{1}{n}\int\limits_0^{nt} V_s\xi_s ds$$

и, значит, в силу эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина при $n\to\infty$ $\mathbf{P}$-п. н.

$$\int\limits_0^t V_s^n \dot{W}_s^n ds\to t\,\frac{\sigma^2}{2}.$$

Отсюда с учетом аналога теоремы Пойа (см. [19] задача 5.4.2) нетрудно вывести, что для любого $T>0$ при $n\to\infty$ Р-п. н.

$$\sup_{t\leqslant T}\left|\int\limits_0^t V_s^n \dot{W}_s^n ds - t\,\frac{\sigma^2}{2}\right|\to 0.$$

Далее устанавливается относительная компактность семейства распределений X^n, $n\geqslant 1$, позволяющая проверить, что

$$\sup_{t\leqslant T}|\alpha_t^n|\xrightarrow{\mathbf{P}}0,\quad \forall T>0.$$

Последнее соотношение дает возможность устанавливать слабую сходимость $\overline{X}^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$ вместо $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$, где $\overline{X}_t^n=X_t^n-\alpha_t^n$. Слабая сходимость

$$\overline{X}^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$$

устанавливается с помощью теоремы 4.36.

§ 5. Диффузионная аппроксимация для семимартингалов с нормальным отражением в выпуклой области

1. Задача Скорохода. Пусть $D=D_{[0,\infty)}(E^d)$ — пространство непрерывных справа и имеющих пределы слева вектор-функций $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$, $X_t=(X_1(t),\ldots,X_d(t))$. Обозначим

$$D(O)=\{X\in D: X_t\in\overline{O},\ t\geqslant 0\},$$

где $\overline{O}$ — замыкание выпуклой области $O\in E^d$ (∂O — граница области O).

Определение. Решением задачи Скорохода о нормальном отражении внутрь области O для $X\in D$ с $X_0\in\overline{O}$ называется функция $Y=(Y_t)_{t\geqslant 0}\in D(O)$ такая, что функция

$$\varphi=Y-X$$

обладает следующими свойствами:

1) $\varphi=(\varphi_t)_{t\geqslant 0}\in D$, $\varphi_0=0$,

2) полная вариация $\mathrm{Var}(\varphi)_t$ функции φ_s, $0\leqslant s\leqslant t$ конечна при каждом $t>0$,

3) для любой непрерывной и ограниченной функции $f: \bar{O} \to E^d$ с $f(y)=0$ при $y \in \partial O$

$$\int_0^t (f(Y_s), d\varphi_s) = 0, \quad t > 0$$

($(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение),

4) Для любой функции $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_t)_{t \geq 0} \in D(0)$ функция $U_t = \int_0^t (\tilde{Y}_s - Y_s, d\varphi_s)$, $t \geq 0$ является неубывающей,

5) функция φ согласована с фильтрацией $\mathbf{D} = (\mathscr{D}_t)_{t \geq 0}$ с $\mathscr{D}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma\{X_s, s \leq t + \varepsilon\}$.

Функция φ с указанными выше свойствами называется ассоциированной с функцией $Y \in D(0)$. Эта функция задает «отражение» по нормале внутрь области O функции X (см. свойство 4) для φ).

Факт существования решения задачи Скорохода устанавливается при двух условиях.

(α) Существует единичный вектор e и константа $c > 0$ такие, что $(e, n) \geq c$ для любого вектора $n \in \bigcup_{y \in \partial O} \mathscr{N}_y(O)$, где $\mathscr{N}_y(O)$ — множество всех внутренних векторов в точке $y \in \partial O$.

(β) Существуют константы $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, с помощью которых для любой точки $x \in \partial O$ определяется открытый шар $B_\varepsilon(x_0)$ с центром x_0 при $|x - x_0| \leq \delta$

$$B_\varepsilon(x_0) = \{y \in E^d : |y - x_0| < \varepsilon\}$$

такой, что $B_\varepsilon(x_0) \subset O$.

Теорема 4.41. Пусть O — выпуклая область в E^d

1) Если выполнено условие (α), то для любой функции $X \in D$ с $X_0 \in \bar{O}$ существует единственное решение задачи Скорохода о нормальном отражении:

$$Y = X + \varphi,$$

где ассоциированная с $Y \in D(O)$ функция $\varphi = \varphi(X)$ непрерывна в топологии Скорохода в каждой точке $X \in D$ и

$$\mathrm{Var}\,(\varphi(X))_t \leq L \sup_{s \leq t} |X_s|, \quad t > 0, \tag{4.144}$$

где константа L зависит только от c из условия (α).

2) Если выполнено условие (β) то утверждение 1) остается в силе, за исключением неравенства (4.144).

Замечание 1. Всякая ограниченная область O удовлетворяет условию (β).

Замечание 2. Если X — непрерывная функция, то $\varphi(X)$ непрерывная функция.

2. Семимартингал с нормальным отражением. Пусть выпуклая область $O \subseteq E^d$ удовлетворяет одному из условий (α) или (β). Тогда для всякого $X \in D = D_{[0,\infty)}(E^d)$ с $X_0 \in \overline{O}$ имеет место решение задачи о нормальном отражении:

$$Y_t = X_t + \varphi_t(X). \tag{4.145}$$

Обозначим $\mathscr{D}_t = \sigma\{X_s,\ s \leqslant t\}$ и определим на $(\mathbf{D}, \mathscr{D}_\infty)$ вероятностную меру $\mathbf{Q}$. Обозначим $\mathscr{D}_\infty^{\mathbf{Q}}$ — пополнение $\mathscr{D}_\infty$ по мере $\mathbf{Q}$ определим и фильтрацию $\mathbf{D}_+^{\mathbf{Q}} = (\mathscr{D}_{t+}^{\mathbf{Q}})_{t \geqslant 0}$, где $\mathbf{D}_{t+}^{\mathbf{Q}} = \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} \mathscr{D}_{t+\varepsilon} \vee \mathscr{N}$, $\mathscr{N}$ — совокупность множеств из $\mathscr{D}_\infty^{\mathbf{Q}}$ нулевой меры $\mathbf{Q}$. Из свойств функции $\varphi(X) = (\varphi_t(X))_{t \geqslant 0}$ вытекает, что $\varphi(X)$ — $\mathbf{D}_+^{\mathbf{Q}}$ — согласованный процесс и, значит, $\varphi(X)$ — семимартингал относительно $\mathbf{D}_+^{\mathbf{Q}}$.

Предположим, что $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ является семимартингалом на стохастическом базисе $(\mathbf{D}, \mathscr{D}_\infty^{\mathbf{Q}}, \mathbf{D}_+^{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q})$. Определим фильтрацию $\mathbf{F}_+^Y = (\mathscr{F}_{t+}^Y)_{t \geqslant 0}$ с

$$\mathscr{F}_{t+}^Y = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma\{Y_s,\ s \leqslant t + \varepsilon\} \vee \mathscr{N},$$

($\mathscr{N}$ — совокупность множеств из $\mathscr{D}_\infty^{\mathbf{Q}}$ нулевой меры $\mathbf{Q}$).

Если X — непрерывный семимартингал, то в его разложении

$$X_t = X_0 + A_t + M_t \tag{4.146}$$

процесс локально ограниченной вариации $A = (A_t)_{t \geqslant 0}$ и локальный мартингал $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$ имеют непрерывные траектории. Кроме того, согласно замечанию 2, к теореме 4.41 $\varphi(X) = (\varphi_t(X))_{t \geqslant 0}$ также имеет непрерывные траектории. Из (4.146) и (4.145) вытекает, что Y — непрерывный процесс с

$$Y_t = X_0 + A_t + M_t + \varphi_t(X).$$

Процесс Y является семимартингалом относительно $\mathbf{D}_+^{\mathbf{Q}}$. Поскольку $\mathbf{F}_+^Y \subset \mathbf{D}_+^{\mathbf{Q}}$, то в силу теоремы 3.22 Y является семимартингалом относительно $\mathbf{F}_+^Y$. Разложение Y относительно $\mathbf{F}_+^Y$ имеет вид

$$Y_t = X_0 + \overline{A}_t + \overline{M}_t, \tag{4.147}$$

где $\overline{A} = (\overline{A}_t)_{t \geqslant 0}$ и $\overline{M} = (\overline{M}_t)_{t \geqslant 0}$ — непрерывные $\mathbf{F}_+^Y$ — согласованные процесс локально ограниченной вариации и локальный мартингал, соответственно. При этом

$$\langle \overline{M} \rangle = \langle M \rangle. \tag{4.148}$$

Предположим, что A — $\mathbf{F}_+^Y$-согласованный процесс. Положим

$$\overline{\varphi} = A - \overline{A}.$$

Тогда

$$Y_t = X_0 + A_t + \overline{M}_t + \overline{\varphi}_t.$$

При этом $\overline{\varphi}$ — $\mathbf{F}^{Y}_{+}$-согласованный процесс, являющийся ассоциированным процессом для Y в задаче о нормальном отражении для семимартингала $\overline{X}=(\overline{X}_t)_{t\geqslant 0}$ с $X_t=X_0+A_t+\overline{M}_t$.

Приведем теперь формулировку мартингальной проблемы диффузионного типа с нормальным отражением в области O.

Пусть $b=b(t,X)$ и $c=c(t,X)$, $t\in R_+$, $X\in D$ — вектор и симметрическая неотрицательно определенная матрица размера d и $d\times d$ соответственно с $\mathscr{B}(R_+)\otimes\mathscr{D}_\infty$ измеримыми элементами, являющимися $\mathscr{D}_t$ — измеримыми при каждом $t\geqslant 0$.

Определение. Вероятностная мера $\mathbf{Q}$ решает мартингальную проблему диффузионного типа с коэффициентом сноса $b(t,Y)$ и коэффициентом диффузии $c(t,Y)$ и нормальным отражением в области $O(Y=X+\varphi(X))$, если

$$\int_0^t (\|b(s,X)\|+\|c(s,X)\|)\,ds<\infty,\ \mathbf{Q}\text{-п. н.},\ t>0$$

и случайный процесс $\overline{M}=(\overline{M}_t)_{t\geqslant 0}$ с

$$\overline{M}_t=Y_t-X_0-\int_0^t b(s,Y)\,ds-\overline{\varphi}_t,$$

где $\overline{\varphi}=(\overline{\varphi}_t)_{t\geqslant 0}$ — ассоциированная с $Y\in D(O)$ функция, является непрерывным локальным мартингалом относительно $(\mathbf{F}^{Y}_{+},\mathbf{Q})$ с квадратической характеристикой

$$\langle\,\overline{M}\,\rangle_t=\int_0^t c(s,Y)\,ds.$$

Из теормы Дуба следует, что случайный процесс Y, рассматриваемый, если это необходимо на некотором расширенном вероятностном пространстве, является слабым решением стохастического уравнения Ито

$$Y_t=X_0+\int_0^t b(s,Y)\,ds+\int_0^t c^{1/2}(s,Y)\,dW_s+\overline{\varphi}_t, \tag{4.149}$$

относительно некоторого d-мерного винеровского процесса $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ с независимыми компонентами.

Данная мартингальная проблема имеет единственное решение, если множество мер, решающих эту проблему с совпадающими сужениями на σ-алгебру $\mathscr{D}_0$ состоит из одной точки. Единственность решения мартингальной проблемы эквивалентна слабой единственности решения уравнения (4.149).

Пусть уравнение (4.149) имеет слабое решение. Положим

$$Z_t=X_0+\int_0^t b(s,Y)\,ds+\int_0^t c^{1/2}(s,Y)\,dW_s.$$

Тогда

$$Y_t = Z_t + \varphi(Z_t),$$

где $\varphi(Z)$ — ассоциированная с Y функция в задаче о нормальном отражении в области O функции $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$, т. е. $\varphi_t(Z) = \overline{\varphi}_t$. Отсюда селдует, что Z является слабым решением уравнения

$$Z_t = X_0 + \int_0^t b(s, Z + \varphi(Z))\,ds + \int_0^t c^{1/2}(s, Z + \varphi(Z))\,dW_s. \quad (4.150)$$

Верно и обратное, если Z — слабое решение (4.150), то Y слабое решение (4.149), причем оба уравнения обладают или не обладают слабой единственностью одновременно.

3. Рассмотрим теперь задачу о диффузионной аппроксимации последовательности семимартингалов с нормальным отражением в выпуклой области $O \subseteq E^d$.

Пусть при каждом $n \geqslant 1$ $X^n = (X_t^n)_{t\geqslant 0}$ — семимартингал, определенный на стохастическом базисе $\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$ с $X_t^n \in E^d$ и триплетом предсказуемых характеристик $T^n = (B^n, C^n, \nu^n)$, которому отвечает каноническое представление

$$X_t^n = X_0^n + B_t^n + X_t^{nc} + \int_0^t \int_{|x|>1} x\,d\mu^n + \int_0^t \int_{|x|\leqslant 1} x\,d(\mu^n - \nu^n)$$

(μ^n — мера скачков X^n)

и

$$X_0^n \in \overline{O}.$$

Для X^n имеет место решение задачи о нормальном отражении:

$$Y_t^n = X_t^n + \varphi_t(X^n)$$

Приведем соответствующие результаты о слабой сходимости

$$Y^n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y, \quad (4.151)$$

где Y — процесс диффузионного типа с отражением в области определяемый уравнением (4.149).

Теорема 4.42. Пусть для области O выполнено условие (α).

Если $g(t, Y)$ обозначает любой из элементов вектора $b(t, Y)$ или матрицы $c^{1/2}(t, Y)$, то

$$|g(t, Y)| \leqslant L(1 + \sup_{s<t} |Y_s|). \quad (4.152)$$

При каждом $t \in S$ (S — всюду плотное множество в R_+ $\int_{R_+|S} dt = 0$) элементы $b(t, Y)$ и $c(t, Y)$ непрерывны в метрике Скорохода в каждой точке $Y \in D(O) \cap C$. Уравнение (4.149) имеет единственное слабое решение. Кроме того,

$$X_0^n \xrightarrow{d} X_0$$

для любых $t>0$, $\varepsilon>0$ и $a\in(0, 1]$

$$\lim_n \mathbf{P}^n\left(\int_0^t \int_{|x|>a} d\nu^n > \varepsilon\right)=0,$$

$$\lim_n \mathbf{P}^n\left(\sup_{s\leqslant t}\left|B_s^n - \int_0^s b(u, Y^n)\,du\right| > \varepsilon\right)=0,$$

$$\lim_n \mathbf{P}^n\left(\sup_{s\leqslant t}\left|\langle M^{na}\rangle_s - \int_0^s c(u, Y^n)\,du\right| > \varepsilon\right)=0,$$

где

$$\langle M^{na}\rangle_t = C_t^n +$$

$$+\int_0^t \int_{|x|\leqslant a} xx^* d\nu^n \sum_{s\leqslant t} \int_{|x|\leqslant a} x\nu^n(\{s\}, dx)\left(\int_{|x|\leqslant a} x\nu^n(\{s\}, dx)\right)^*,$$

$*$ — знак транспонирования.

Тогда имеет место (4.151).

Теорема 4.43. Утверждение теоремы 4.42 остается в силе, если вместо условия (α) на область O предполагается выполненным условие (β), а вместо условия (4.152) условие

$$|g(t, Y)|\leqslant L.$$

4. Пример. Пусть $A=(A_t)_{t\geqslant 0}$, $D=(D_t)_{t\geqslant 0}$ — точечные процессы и $Q=(Q_t)_{t\geqslant 0}$ — решение уравнения

$$Q_t = A_t - \int_0^t I(Q_{s-}>0)\,dD_s,$$

где $\int_0^t I(Q_{s-}>0)\,dD_s = \sum_{s\leqslant t} I(Q_{s-}>0)\,\Delta D_s.$

Процессы A и D можно интерпретировать как процессы поступления заявок и обслуживания, а Q — как процесс очереди в модели массового обслуживания с автономным прибором. В простой модели такого вида предполагается, что A и D — независимые пуассоновские процессы с интенсивностями λ и μ соответственно. Усложним модель, считая, что процессы A и D обладают свойством:

$$\sum_{t>0} \Delta A_t \Delta D_t = 0,$$

т. е. скачки процессов A и D не совпадают. Кроме того, при фиксированном значении очереди Q_t в момент времени t интенсивности процессов A и D зависят от Q_t:

$$\lambda=\lambda(\varepsilon Q_t), \qquad \mu=\mu(\varepsilon Q_t),$$

где ε — малый параметр, $\lambda=\lambda(x)$, $\mu=\mu(x)$ — неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции с ограниченными и равномерно непрерывными производными $\lambda'(x)$ и $\mu'(x)$.

Если λ и μ — константы и $\lambda=\mu$, то в такой модели массового обслуживания не возникает стационарного режима. В общем случае при

$$\lambda(0)=\mu(0) \tag{4.153}$$

также неестественно предполагать существование стационарного режима. В связи с этим для изучения очереди на больших временных интервалах в предположении (4.153) рассмотрим нормированный процесс $Y^\varepsilon=(Y_t^\varepsilon)_{t\geqslant 0}$ с

$$Y_t^\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}\, Q_{t/\varepsilon}. \tag{4.154}$$

В этом случае

$$Y^\varepsilon \xrightarrow{\mathscr{L}} Y, \tag{4.155}$$

где $Y=(Y_t)_{t\geqslant 0}$ — диффузионный процесс с нормальным отражением в области $O=\{x>0\}$, определяемый стохастическим уравнением

$$Y_t=\int_0^t [\lambda'(0)-\mu'(0)]\,Y_s ds+\sqrt{2\lambda(0)}\,W_t+\bar\varphi_t, \tag{4.156}$$

($W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ — винеровский процесс, $\bar\varphi=(\bar\varphi_t)_{t\geqslant 0}$ — ассоциированная с Y функция).

Чтобы установить этот факт, достаточно заметить, что

$$Q_t \to X_t-\inf_{s\leqslant t} X_s, \qquad X_t=A_t-D_t$$

и, значит, Q — решение задачи Скорохода о нормальном обращении в области $O=\{x>0\}$ и $\inf\limits_{s\leqslant t} X_s=\varphi_t(X)$ — ассоциированная с Q функция.

Далее,

$$Y_t^\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}\,(X_{t/\varepsilon}-\inf_{s\leqslant t/\varepsilon}(X_s))=$$
$$=\sqrt{\varepsilon}\,X_{t/\varepsilon}+\varphi_{t/\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}\,X)=\sqrt{\varepsilon}\,X_{t/\varepsilon}+\varphi_t(\sqrt{\varepsilon}\,X_{\cdot/\varepsilon}).$$

Применение теоремы 4.42 с $\varepsilon=1/n$ приводит к слабой сходимости (4.155) с диффузионным процессом Y, определяемым стохастическим уравнением (4.156) с нормальным отражением.

При этом

$$Y \stackrel{\mathscr{L}}{=} |\widetilde{Y}|,$$

где $\widetilde{Y}=(\widetilde{Y})_{t\geqslant 0}$ — гауссовский диффузионный процесс — решение линейного уравнения Ито

$$\widetilde{Y}_t=\int_0^t [\lambda'(0)-\mu'(0)]\,\widetilde{Y}_s ds+\sqrt{2\lambda(0)}\,\widetilde{W}_t$$

относительно винеровского процесса $\widetilde{W}=(\widetilde{W}_t)_{t\geqslant 0}$.

КОММЕНТАРИЙ К ГЛАВЕ 4

I. § 1. См. книгу А. Н. Ширяева [26].

§ 2. По поводу различных типов сходимостей см., например, А. Н. Ширяев [26]. Основные сведения о топологии Скорохода содержатся в книге Биллингсли [1], см. также Линдвалл [43] и Стоун [49].

§ 3. Теорема 4.1 установлена в [42], по поводу теорем 4.2, 4.4 см. [8], [18], [39].

§ 4. Доказательство теоремы 4.5, 4.7 имеется в книгах Р. Ш. Липцера, А. Н. Ширяева [19], Жакода, А. Н. Ширяева [40]. Теоремы 4.8—4.10 принадлежат Жакоду [38], см. также Жакод, А. Н. Ширяев [40].

§ 5. По поводу теоремы 4.11 см. Жакод, А. Н. Ширяев [40]. Теоремы 4.12, 4.13 установлены у Р. Ш. Липцера, А. Н. Ширяева [19], а теоремы 4.14, 4.15 — у Р. Ш. Липцера, А. Н. Ширяева [19] и Жакода, А. Н. Ширяева [40]. Теорема 4.16 имеется в Гл. 8 [19], теорема 4.18 — в [40], теорема 4.19 — в [19].

§ 6. Необходимые и достаточные условия относительной компактности (теорема 4.20) семейства вероятностных мер приводятся у Биллингсли [1]. Теорема 4.21 принадлежит А. Н. Колмогорову—Н. Н. Ченцову и также приводится в [1]. Теорема 4.22, являющаяся одним из наиболее эффективных инструментов доказательства относительной компактности, принадлежит Альдусу [27], [28].

§ 7. Теоремы 4.23 и 4.24 имеются у Р. Ш. Липцера, А. Н. Ширяева [19], Жакода, А. Н. Ширяев [40] см. также А. А. Бутов [3], Б. И. Григелионис, Р. Микулявичус [11], [12], И. И. Гихман, А. В. Скороход [6]. По поводу теоремы 4.25 см. В. А. Лебедев [17] и Жакод, А. Н. Ширяев [40]. Теоремы 4.26—4.28 имеются у Жакода, А. Н. Ширяева [40].

§ 8. Материал этого параграфа заимствован из книги Жакода, А. Н. Ширяева [40] (Гл. 3).

II. § 1. Результаты этого параграфа являются классическими. Различные их версии имеются в работах Розенблата [46], В. А. Волконского, Ю. А. Розанова [5], В. А. Статулявичуса [23], Серфлинга [48], М. И. Гордина [9], Мак Лиша [45]. Дополнительная библиографическая информация имеется в книге И. А. Ибрагимова, Ю. В. Линника [14] и Холла и Хейде [37]. Теоремы 4.31 и 4.32 имеются в книге Р. Ш. Липцера, А. Н. Ширяева [44] и принадлежат Д. О. Чикину [25], см. также Дюрр, Гольдштейн [32]. Марковский случай рассмотрен в работах Бхаттачария [29] и Туати [51], см. также М. И. Гордин и Б. А. Лифшиц [10].

§ 2. Модель стохастического принципа усреднения Боголюбова заимствована у А. Д. Вентцеля и М. И. Фрейдлина [4]. Аналогичная модель массового обслуживания в векторном случае изучена в работе Я. А. Когана, Р. Ш. Липцера, А. В. Смородинского [15].

§ 3. Примеры этого параграфа имеются у Р. Ш. Липцера, А. Н. Ширяева [44] (гл. 8 и 9) и Я. А. Когана, Р. Ш. Липцера, А. В. Смородинского

[15]. По поводу усреднения в моделях с диффузией см. А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин [4].

§ 4. Результаты этого параграфа опираются на работы М. А. Красносельского, А. В. Покровского [16], Досса [31], Р. Мацкявичуса [20], Дьёндя [36].

§ 5. Проблема Скорохода впервые была сформулирована для полупространства [22] и решена Танакой [50] для выпуклой области. Предельные теоремы в области изучались Б. И. Григелионисом и Р. Микулявичусом [34]. Диффузионная аппроксимация с отражением с применением к теории очередей рассматривалась А. А. Боровковым [2], Зеликуртом [33], Б. И. Григелионисом, Р. Микулявичусом [35].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.— 352 с.
2. *Боровков А. А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания.— М.: Наука, 1980.— 381 с.
3. *Бутов А. А.* К вопросу о слабой сходимости последовательности семимартингалов к процессу диффузионного типа // Успехи мат. наук.— 1983.— *38*, в. 5.— С. 181—182.
4. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений.— М.: Наука, 1979.— 424 с.
5. *Волконский В. А., Розанов Ю. А.* Некоторые предельные теоремы для случайных функций. I; II // Теория вероятностей и ее применения.— 1959. — *4*, вып. 2.— С. 123—140;— 1961.— *6*, вып. 2.— С. 202—214
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев: Наукова думка, 1982.— 612 с.
7. *Гнеденко Б. В.* К теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1939.— С. 181—232, 643—647
8. — *Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.— М.— Л., Гостехиздат, 1949
9. *Гордин М. И.* О центральной предельной теореме для стационарных процессов // Докл. АН СССР.— 1969.— *188*, № 4.— С. 739—741
10. —, *Лифшиц Б. А.* Центральная предельная теорема для стационарных процессов Маркова // Докл. АН СССР.— 1978.— *239*, № 4.— С. 766—767
11. *Григелионис Б. И., Микулявичус Р.* О слабой сходимости полумартингалов // Лит. мат. сб.— 1981.— *21*, № 3.— С. 1—24
12. —, — О слабой сходимости случайных точечных процессов // Лит. мат. сб.— 1981.— *21*, № 4.— С. 41—55
13. *Золотарев В. М.* Обобщение теоремы Линдеберга—Феллера // Теория вероятностей и ее применения.— 1967.— *12*, № 4.— С. 666—677
14. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины.— М.: Наука. 1965.— 524 с.
15. *Коган Я. А., Липцер Р. Ш., Смородинский А. В.* Гауссовская диффузионная аппроксимация марковских замкнутых моделей сетей связи ЭВМ // Проблемы передачи информации.— 1986, *22*, № 1.— С. 49—65
16. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом.— М.: Наука, 1983
17. *Лебедев В. А.* Об относительной компактности семейств распределений семимартингалов // Теория вероятностей и ее применения.— 1981.— *26*, № 1.— С. 143—151
18. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* О слабой сходимости семимартингалов к стохастически непрерывным процессам с независимыми и условно независимыми приращениями // Мат. сб.— 1982.— *116(158)*, № 3(11).— С. 331—358
19. —, — Теория мартингалов.— М.: Наука, 1986.— 512 с.

20. *Мацкявичус В.* Устойчивость решений симметрических стохастических дифференциальных уравнений // Лит. мат. сб.— 1985.— *25*, № 4.— С. 343—352
21. *Ротарь В. И.* О неклассической оценке точности аппроксимации в центральной предельной теореме // Мат. заметки.— 1978.— *23*, № 1.— С. 143—154
22. *Скороход А. В.* Стохастические уравнения для диффузионных процессов в ограниченной области // Теория вероятностей и ее применения.— 1962. — *6*, № 3.— С. 264—274; 1963.— *7*, № 1.— С. 3—23
23. *Статулявичус В. А.* Некоторые новые результаты для сумм слабо зависимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения.— 1960. — *5*, № 2.— С. 233—234
24. *Хинчин А. Я.* Предельные законы для сумм независимых случайных величин.— М.: Гостехиздат, 1938
25. *Чикин Д. О.* О мартингальных методах доказательства центральной предельной теоремы для зависимых случайных величин // Ин-т проблем управления.— 1984
26. *Ширяев А. Н.* Вероятность.— М.: Наука, 1980.— 576 с.
27. *Aldous D. J.* Stopping time and tightness // Ann. Probab.— 1978.— *6*, No 2.— C. 335—340
28. — Weak convergence and the general theory of processes.— Incomplete draft of monograph // Department of Statistics, University of Carolinia Berkeley.— 1981.— C. 144
29. *Bhattacharya R. N.* On the functional limit theorem and the law of the iterated logarithm for Markov processes // Z. Wahrsch. verw. Geb.— 1982. — *60*.— C. 185—201
30. *Donsker M.* An invariance principle for certain probability limit theorems // Mem. Amer. Math. Soc.— 1951.— *6*
31. *Doss H.* Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires // Ann. Inst. H. Poincaré.— 1977.— *13*.— C. 99—125
32. *Dürr D., Goldstein S.* Remarks on the central limit theorem for weakly dependent random variables // Proc. 1-st BIBOS Conf., Bielefeld.— 1984. Berlin. Springer.— 1986.— C. 104—118 (Lect. Notes Math.— *1158*)
33. *De Zelicourt C.* Une méthode de martingales de convergence d'une suite de processus de sauts markoviens vers une duffusion associée àunne condition frontiére. Application aux systèmes de files // Ann. Inst. H. Poincaré.— 1981.— *17*, No 4.— C. 351—375
34. *Grigelionis B., Mikulevicius R.* On weak convergence of random processes with boundary conditions // Nonlinear Filtering and Stochastic Control, Proceedings, Cortona.— 1981. Berlin. Springer, 1983.— C. 260—275 (Lect. Notes Math.— *972*)
35. —, — On the diffusion approximations in queueing theory // Proc. Conf. on Teletrafic. Moscow.— 1984
36. *Gyöngy I.* On the approximation of stochastic differential equations // Stochastics.— 1988.— *23*.— C. 331—352
37. *Hall P., Heyde C. C.* Martingale limit theory and its application.— New York: Acad. Press, 1980
38. *Jacod J.* Processus à accroissements independants: une condoition nécessaire et suffisante de convergence en loi // Z. Wahrsch. Verw. Geb.— 1983.— *63*.— C. 109—136
39. — *Mémin J.* Sur la convergence des semimartingales vers un processus à accroisements indèpendants // Sémin. probab. XIV. Lect. Notes Math.: New York, 1980.— *784*.— C. 227—248
40. — *Shiryaev A. N.* Limit theorems for stochastic processes.— Springer—Verlag. 1987.— 601 c.
41. *Lévy P.* Sur une loi de probabilité analogue à celle de Poisson et sur un sous-groupe important du groupe des lois indéfiniment divisibles // Bull. Sci. Math.— 1939.— *63*.— C. 24—268
42. *Lindeberg J. W.* Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheislichkeitsrechnung. // Math. Z.— 1922.— *15*.— C. 211—225

43. *Lindvall T.* Weak convergence of probability measures and random function space $D\,[0, \infty]$ // J. Appl. Probab.— 1973.— *10*.— C. 109—121
44. *Liptser R. Sh., Shiryayev A. N.* Theory of Martingales.— Kluwer.— 1989
45. *McLeish D. L.* Invariance principle for dependent variables // Z. Wahrsch. verw. Geb.— 1975.— *32*.— C. 165—178
46. *Rosenblatt M. A.* Central limit theorem and a strong mixing condition // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1956.— *42*, No 1.— C. 43—47
47. *Sam Lazaro J., Meyer P. A.* Questions de théorie des flots // Sémin. Probab. IX. Lect. Notes Math.— Berlin etc., 1975.— *465*.— C. 213—224
48. *Serfling R. J.* Contributions to central limit theiry for dependent variables // Ann. Math. Stat.— 1968.— *39*.— C. 1158—1175
49. *Stone C.* Weak convergence of stochastic processes defined on semiinfinite time intervals // Proc. Amer. Math. Soc.— 1963.— *14*.— C. 694—696
50. *Tanaka H.* Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions // Hiroshima Math. J.— 1979.— *9*, No 1.— C. 163—177
51. *Touati A.* Théorèmes de limite central fonctionnelle pour les processus de Markov // Ann. Inst. H. Poincaré. B.— 1983.— *XIX*.— C. 43—59

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Технический редактор *Л. В. Кутакова* Корректор *Т. Н. Собакина*

Сдано в набор 18.10.89 Подписано в печать 26.12.89
Формат бумаги 60×90 1/16 Бум. кн.-журн. Литературная гарнитура.
Высокая печать. Усл. печ. л. 16,25 Усл. кр.-отт. 16,25 Уч.-изд. л. 13,86
Тираж 1000 экз. Заказ 7927 Цена 2 р. 60 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, А-219, Балтийская ул., 14. Тел. 155-42-29

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ,
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

Индекс 56876

ISSN 0233—6723. ИНТ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 45. 1989. 1—260.

УДК 519.216+519.218.1

С. В. Анулова, А. Ю. Веретенников, Н. В. Крылов, Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Стохастическое исчисление. // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. — ВИНИТИ, 1989. — *49*. — С. 5—260

Изложены основные вопросы стохастического исчисления, относящиеся к свойствам винеровского процесса и его связи с уравнениями в частных производных, рассмотрены сильные и слабые решения стохастических дифференциальных уравнений, эволюционные уравнения. Большое внимание уделено стохастическому интегрированию по семимартингалам и случайным мерам, абсолютной непрерывности и сингулярности вероятностных мер, предельным теоремам для семимартингалов.

ОПЕЧАТКИ

ИНТ, Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 45, 1989 г.

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
10	11 снизу	$\alpha < 1/p,$	$\alpha > 1/p,$
103	6 снизу	$p \in C^{\infty}_{b\xi},$	$p \in C_b^{\infty},$
117	14 сверху	R	$\bar{R}$
128	11 сверху	$\ldots cA_0 = 0.$	с $A_0 = 0.$
130	12 снизу	$H = (H_{t(\omega)})_{t \geqslant 0}$	$H = (H_t(\omega))_{t \geqslant 0}$
134	9 снизу	с $\nu(\omega; \{t\} \times E) \leqslant 1$	с $\nu(\omega; \{t\} \times E \leqslant 1$
137	2 сверху	тингал. Согласно § 1	тингал. Согласно § 1,
155	15 сверху	$\ldots \vert_* \nu_t < \infty \ldots$	$\ldots \vert * \nu_t < \infty \ldots$
226	1 снизу	$\frac{1}{n} \int\limits_0^{n^t}$	$\frac{1}{n} \int\limits_0^{nt}$
252	13 снизу	condoition	condition
252	26 снизу	duffusion ... àunne	diffusion ... à une
253	9 снизу	... theiry	theory

Зак. 7927